図学教育へのパーソナルコンピューターの利用について（9）

－不規則平面、主として半球、半円筒形天井に描画する方法－

井　村　俊　一

1．はじめに

本学紀要39号[1]で、言及したダイレクトタイプの平面アナモルフォーズの例として、本学紀要44号[2]で解析した投射型遠近法によるアナモルフォーズでの投影面は、水平面アナモルフォーズ、壁面アナモルフォーズとも平面であった。ところが、建造物でのアナモルフォーズの主たる舞台である教会では、丸天井（半球形）の広間や、半円筒形天井の通廊があることが多く、アナモルフォーズの画家や建築家は、そのような不規則な平面に対しても、工夫して描画している。そのような技法を扱ったアブラハム・ボッス（Abraham Bosse）の「遠近法実習の普遍的方法」[3] という本も出され、その２巻本の下巻は全巻をあげて「不規則な表面上の遠近法」を扱っているという。天井のアーチ状の形が半円筒形や半球形を問わずその内面に描く困難さを我慢して、通常の絵を描く。その絵を下から見上げると、それは遠近法による歪みと、不規則面による歪みの二つの歪みの構造を持つ絵となる。つまり、鑑賞者には理解不能の絵となるわけである。アナモルフォーズの本来の意味は、設定の視点を離れて見れば、絵画が理解不能でも、設定視点で見れば正常な絵画が鑑賞できる構造を称するが、不規則表面上に描かれた通常の絵画は、理解不能のままになる。これでは意味がないのでアブラハム・ボッスの著書のような技法解説書が必要となったのであろう。ボッスの技法は、アーチ状の天井下部に紐を使って通廊の幅の水平格子を作り、この格子を視点の位置に置いた蝋燭の光で天井に投影する。するとそこに縞格子ができるのである。そのことは、Fig. 1 に示されている。最初に水平格子に通常の遠近法で絵を描く。

次に、水平格子を座標のように考え、絵を天井の縞格子に転写する。これはまさしく線遠近法の投影の原理そのものを使った方法である。

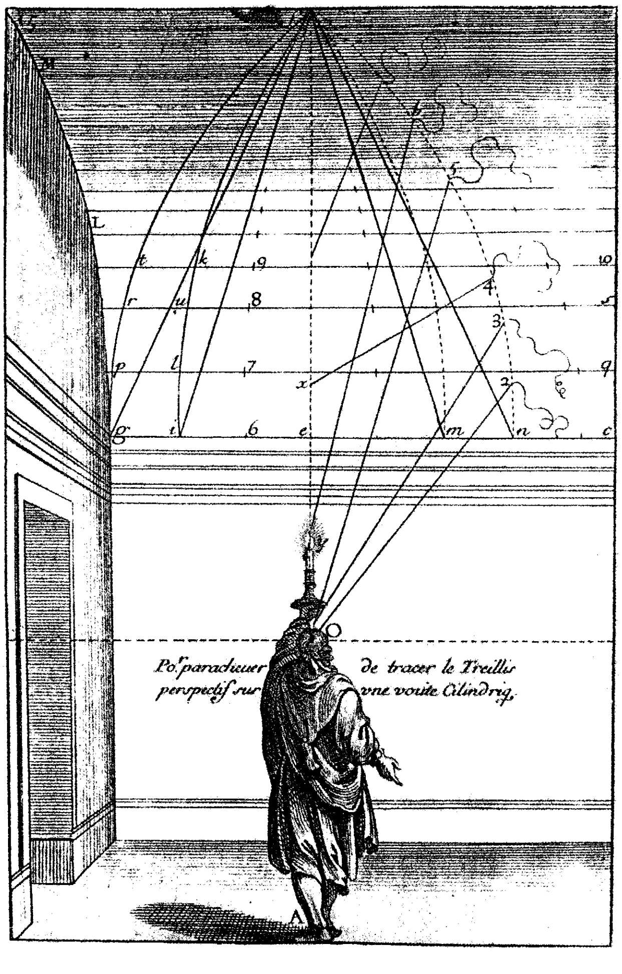

Fig. 1　アブラハム・ボッス[4]
ドーム天井への遠近法の投影1653年

［キーワード］　半円筒形天井　半球形天井　描画法

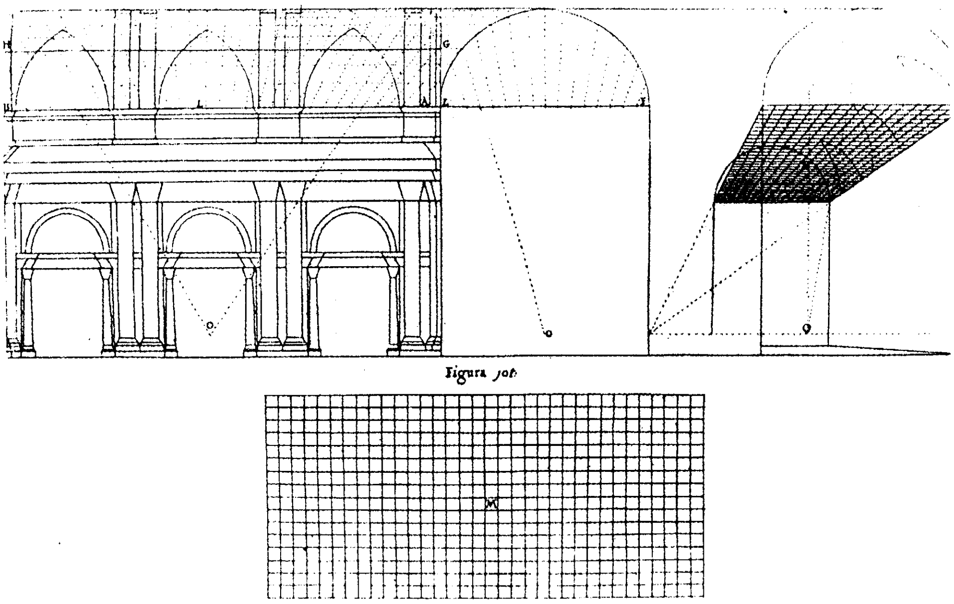

Fig. 2　アンドレア・ポッツォ[7]「絵画と建築の遠近法」で“湾曲した天井に図柄を投影する法”

水平格子に下絵に相当する絵を通常の線遠近法で描き、天井に転写し、それを視点の位置から見上げると、天井のアーチの形状が消え、水平な天井に絵が描かれている騙し絵の状態になる。一端、視点の位置から離れると、たちまち、天井のアーチ形状が出現する。このような効果の絵画を、イエズス会の画家であり、建築家でもあったアンドレア・ポッツォ（Andrea Pozzo）神父は、イル・ジェズ教会の聖イグナティウスの間に通じる半円筒形天井をもつ廊下の天井に実現させた。その制作方法として、自らの著書「絵画と建築の遠近法」で“湾曲した天井に図柄を投影する法”に一枚の挿図を残している。Fig. 2 がその挿図である。その図から天井に転写する方法を推測すると、基本的な技法として、Fig. 3 に示すようなアルブレヒト・デューラー（Albrecht Durer）の版画に見られるように、視点からの視線に相当するものに紐を使う。又、ボッスのしたように紐等で水平格子を作り、蝋燭を視点の位置に置き、視線に沿って天井に投影する方法を使ったと考えられる。ただ、池上氏の論文[5]では、通廊があまりに巨大なために天井に転写するために水平格子を二段構えにしたりして工夫をしていることが論じられている。

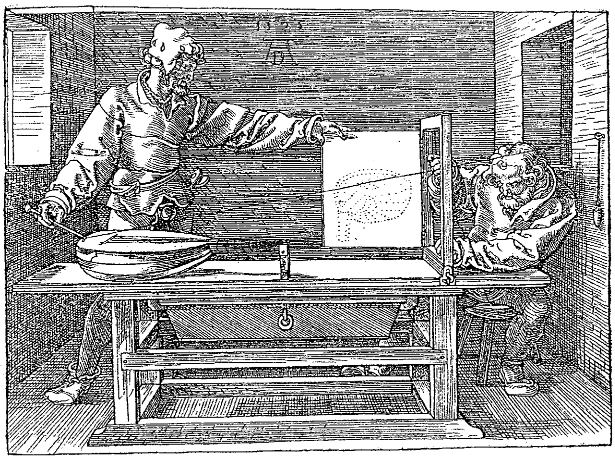

Fig. 3　アルブレヒト・デューラー「計量法」[6]

Fig. 4、Fig. 5 に半円筒形天井に描かれた同じ絵画の二方向から見た写真を示す。

以上、不規則な天井、特に円筒形天井に絵画を転写した実例について、過去の研究に基づいて記述してきた。本報告では、現代に半球形、半円筒形の天井に天井画を再現したり、新しく制作したりする場合、強力な道具であるパーソナルコンピュータを使う。転写方法としては、線遠近法の原理に３次元の解析幾何学を適用して、水平格子と天井の縞格子の

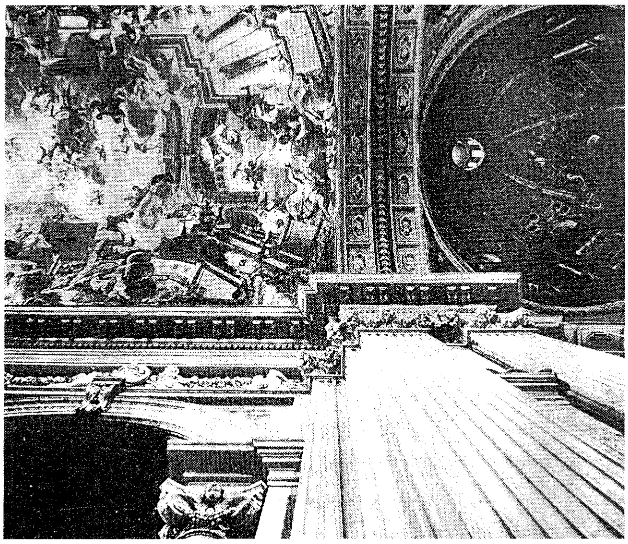

Fig. 4　天井画[8]「聖イグナティウスの勝利」
アンドレア・ポッツォ

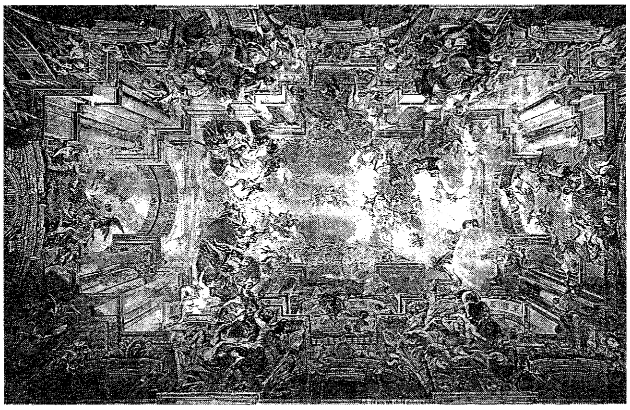

Fig. 5　天井画[9]「聖イグナティウスの勝利」
アンドレア・ポッツォ

点対点の変換式を導く。次に水平格子全体を不規則表面天井に投影し、その縞格子の特徴を調べる。又、逆に、半円筒形天井や半球形天井に一定の格子を設定し、それが視点との関係で水平格子の設定位置ではどのような格子になるかも考察する。即ち、水平格子の位置は、線遠近法での画面を示すので、水平格子位置の絵画が鑑賞者の見る絵画であるから、そこに通常の遠近法で絵画を描き、それを天井に投影（転写）すればよい。水平位置の格子と天井面の格子の関係が転写画を制作するときに重要な役割を果たすからである。座標計算による天井画の制作方法では、実際の制作をする前に、適当な縮尺の半球、半円筒形の天井を作り、そこで天井画の効果を調べる、つまり、シミュレーションが容易に可能なことが特長である。

2．半円筒形天井への投影の解析

Fig. 6に示す座標系を設定し、Eを視点、水平格子をX－Y平面に設定、点Eと水平格子面上の点Pを結び延長して、半円筒天井との交点をQとするとQ点は、P点の投影点である。それぞれの点の座標をE（0，0，－H），P（x，y，0），Q（X，Y，Z）とし、視点からの絵画の範囲として、水平長さを2L、半円筒の半径をRとし、ここで、H，R，L＞0とする。P点は、$-R \leqq x \leqq R$、$-L \leqq y \leqq L$の条件が付く。半円筒天井のアーチ状部分の方程式は、$X^2+Z^2=R^2$の$Z \geqq 0$の部分である。水平格子は、X－Y平面（Z＝0、$-L \leqq y \leqq L$、$-R \leqq x \leqq R$）に長方形の矩形の格子を設定したものである。天井画制作は、この水平格子上に下絵を設定して、その座標（格子位置）を通じて、天井の投影座標（縞格子位置）に変換し、描画するものである。

E点からの視線の方程式は、

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z+H}{H} \qquad \text{——— (1)}$$

半円筒形天井の方程式は、

$$X^2+Z^2=R^2 \quad (Z \geqq 0) \qquad \text{——— (2)}$$

(1)式より、

$$\left\{\begin{array}{l} X=\left(\dfrac{Z+H}{H}\right)x \\ Y=\left(\dfrac{Z+H}{H}\right)y \end{array}\right. \qquad \text{——— (3)}$$

であるから、
(3)を(2)式に代入して、

$$Z^2(x^2+H^2)+2Hx^2Z+H^2(x^2-R^2)=0 \qquad \text{——— (4)}$$

(4)式から、変換式は、

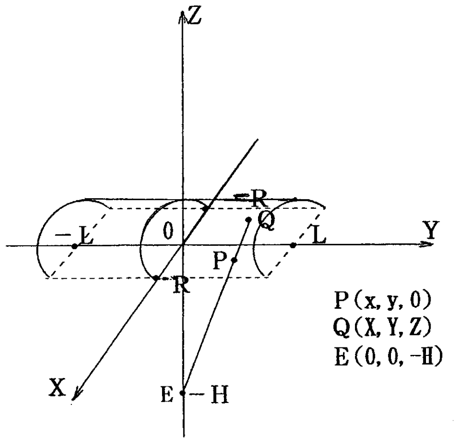

Fig. 6　半円筒形天井の解析座標系

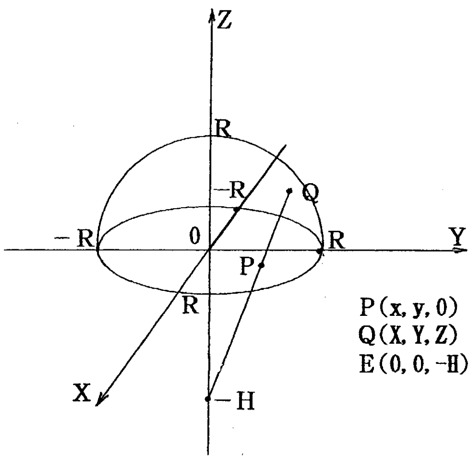

Fig. 7　半休形天井の解析座標系

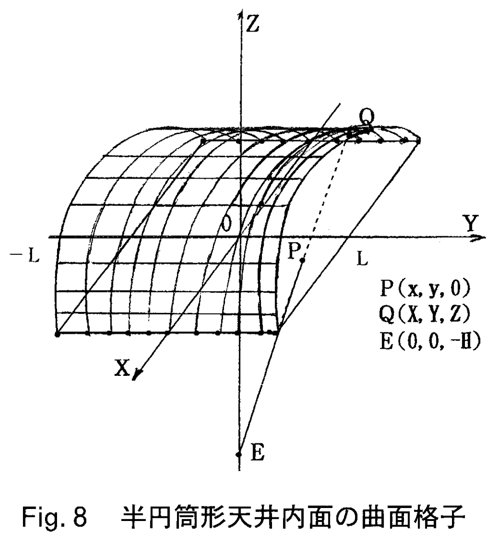

Fig. 8　半円筒形天井内面の曲面格子

$$\begin{cases} X=\left(\dfrac{Z+H}{H}\right)x \\ Y=\left(\dfrac{Z+H}{H}\right)y \\ Z=\dfrac{-x^2H+H\sqrt{x^2(R^2-H^2)+H^2R^2}}{x^2+H^2} \end{cases}$$

となる。

3．半球形天井への投影の解析

半円筒形天井と同じ座標系をFig. 7に示すように設定する。Eを視点、水平格子面は、X－Y平面であるが、水平設定格子は、円形となる。そのため、P点の座標は、$-R \leqq x \leqq R$，$-R \leqq y \leqq R$ である。

半球形天井の場合は、半球形の透視図を画面に描く通常の線遠近法の作図の丁度、逆の作業を行うことにすぎないが、画面が平面である透視図描画に対して３次元の半球形内面の曲面に描画することは、一般的に困難を伴う。そこで、ここでは水平扇形格子と半球面との関係を座標を通して変換式を求める。

変換式は、

$$\begin{cases} X=\left(\dfrac{Z+H}{H}\right)x \\ Y=\left(\dfrac{Z+H}{H}\right)y \\ Z=\dfrac{-H(x^2+y^2)+H\sqrt{(x^2+y^2)(R^2-H^2)+H^2R^2}}{x^2+y^2+H^2} \end{cases}$$

となる。水平画面上の点Ｐ（ｘ，ｙ，０）において $|x| \leqq R$，$|y| \leqq R$ の条件で、ｘ，ｙを任意に設定して、変換式により、投影点Ｑ（Ｘ，Ｙ，Ｚ）を求める。

4．半円筒形天井、半球形天井から水平格子への投影の解析

この節では、不規則な表面に描画する天井画の制作を出来るだけ容易にするために、半円筒形天井では、Ｙ軸に平行に半円筒の内面に引いた線群とＹ軸に直角でＸ－Ｚ面に平行な半円弧の線群で格子を形成する。その曲面格子の水平格子への逆投影を求

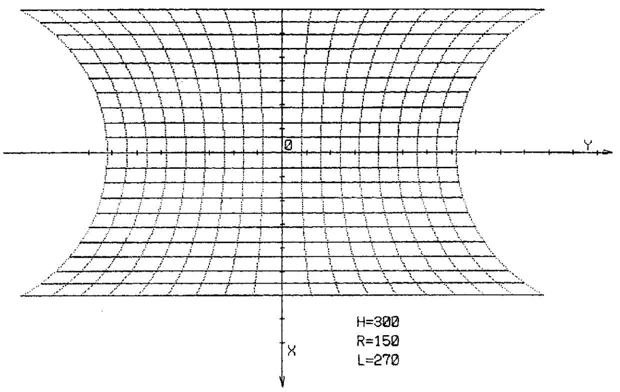

Fig. 9　半円筒形天井の解析座標系

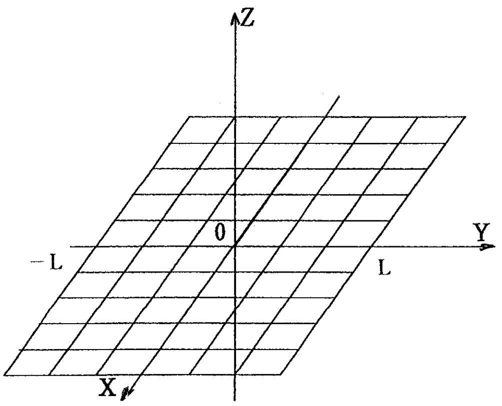

Fig.10　水平格子(画面)

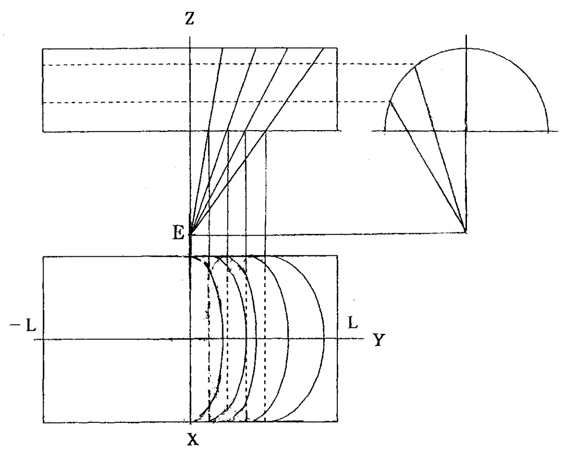

Fig.11　半円筒形天井内面の楕円格子概要

め、考察する。Fig. 8 に上述の曲面格子を示し、視点Eからその曲面格子の水平面（X－Y画面）に対する逆投影を求める。その結果を Fig. 9 に示す。

この結果は、予想されることではあるが、視点の真上付近では曲面格子のY軸に直角の線群は殆ど歪んではいない。又、Y軸に平行な線群は，逆投影してもY軸に平行となる。視点から遠ざかる程、Y軸に直角の線群の歪みは大きくなる。このことを考慮して天井画を制作する必要がある。又、Lの値も高々、Rぐらいが視界の範囲である。次に Fig.10に示す格子の半円筒形天井の内面への投影の概要を、Fig.11に示す。形に対するアナログ思考で、円筒形を斜めに切断すると、切断面は、楕円を示すことは周知のことであるが、シミュレーションでは、数値データが必要となるのでその計算式を以下に示す。最初に Fig. 9 で解説する。第２節の変換式を逆にして、点Q（X，Y，Z）から点P（x，y，0）を求める変換式を求めると、

$$(Z+H)^2x^2+H^2(Z^2-R^2)=0 \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{H\sqrt{R^2-Z^2}}{Z+H} \\ y=\left(\dfrac{H}{Z+H}\right)Y \\ z=0 \end{cases}$$

となる。

次に、水平格子の半円筒形天井内面への投影の全体を求めることは、視点E（0，0，－H）と、水平格子のY軸に直角の成分の両端即ち、半円弧の両下端、座標では（R，y，0）、（－R，y，0）の３点で決まる平面と半円筒内面の曲面との交線を求めることである。

半円筒形天井の方程式は、

$$X^2+Z^2=R^2 \quad (Z\geqq 0)$$

点（R，y，0），(－R，y，0)，（0，0，－H）の３点で決まる平面の方程式は、

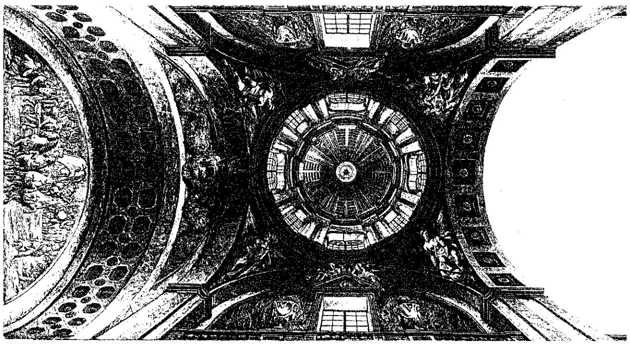

Fig.12　ベルナルド・ベロット1767年～68年
鐘楼のある丸天井－ウジャドウスキー－
宮殿のための草案（？）

$$-HY+yZ+Hy=0$$

となる。

平面と曲面の交線を求めると、

$$y^2X^2+H^2Y^2-2yH^2Y+H^2y^2-y^2R^2=0$$

となり、楕円を示す。

半円筒形天井内面に楕円の孤を描くには、半円の両下端（R，y，0），（－R，y，0）と、$|y| \leqq L$で、$y=a$（$a \geqq 0$）とすると、天井面の最上部（Z＝R）でのYの値を求めると、X＝0，Z＝Rで

$$Y=\frac{(H+R)}{H}a$$

となる。

即ち、3点（R，a，0），（－R，a，0），$\left(0, \frac{(H+R)a}{H}, R\right)$を結んで描けばよい。

次に、半球形の天井の場合を考察する。この場合は容易で、線遠近法の知識が得られた頃から周知のことであった。視点を半球形天井の中心の直下に設定し、半球形天井の中心を含む水平面を画面として、水平面に同心円とその中心を通る放射状線群とで、扇形格子を設定し、それを、曲面天井に投影すると同心円は緯度線になり、放射状線は経度線となる。逆に、天井の緯度線、経度線は、水平画面の扇形格子になる。即ち、扇形格子は、丸天井の透視画である。そのため、水平の天井であっても、そこに、扇形格子を描画することや、その格子に応じた絵画を描くことにより、偽の丸天井での騙し絵の制作が可能となる。その例をFig.12の天井画に示す。

このような丸天井内面への描画は、下絵の位置である水平画面での、例えば等間隔同心円の丸天井内面への投影図である緯度線の円の間隔は、高さ（Z）が増すにつれて、間隔が狭くなる。騙し絵のときは特にこの間隔に注意をはらう必要がある。この間隔は以下の式に示される。

水平画面位置での円の方程式を

$$x^2+y^2=r_1^2 \quad (0 \leqq r_1 \leqq R)$$

とすると、

$$Z=\frac{-Hr_1^2+H\sqrt{r_1^2(R^2-H^2)+H^2R^2}}{r_1^2+H^2}$$

で、緯度線（円）の半径をR_1とすると、

$$R_1=\frac{(Z+H)}{H}r_1$$

となる。

丸天井の解析例として、Fig.14を示す。

Fig.15は、アンドレア・マンテーニャ「ドゥカーレ宮の天井画」を示す。この天井画について「だまし絵」[10]の著者、種村季弘、高柳篤は、《天井の下に立って見上げると、円形天井が大煙突のように筒抜けになり、円縁からは天使や修道女たちが祝福の微笑みを浮べながら覗き込んでいて、その背後には偽の空が見える。》[12]と記述している。

Fig.16は、アンドレア・ポッツォによる『「絵で描いた虚構の円天井」1685年、ローマ、聖イグナチオ聖堂』である。視点の位置を半球の中心より少しずらして設定し、細密に描かれたこの天井画は偽物の天井とは思えない現実感にあふれている。

このように、丸天井の内面の天井画は、その理論の容易さにより、その目的が通常の天井画か、騙し絵かを問わず、15世紀始め頃から少なからず制作されている。

5．おわりに

本論の一つの目的は、丸天井や円筒形天井内面に

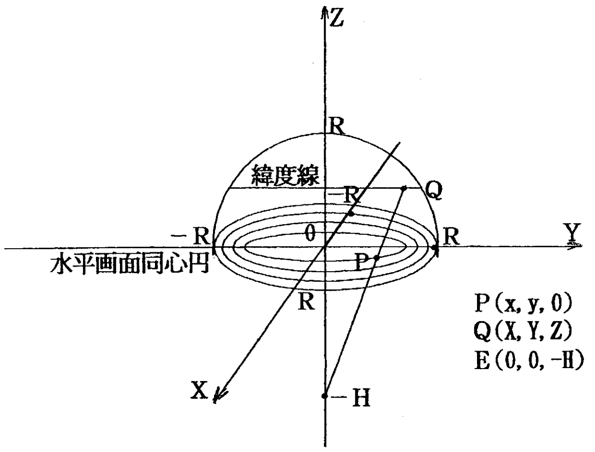

Fig.13　丸天井の解析図

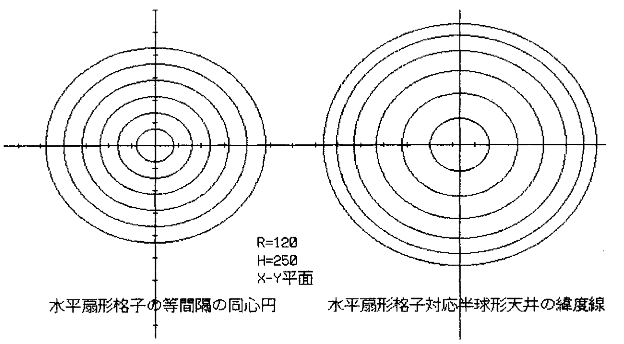

Fig.14　水平扇形格子と等間隔の同心円とその半球形天井の対象図

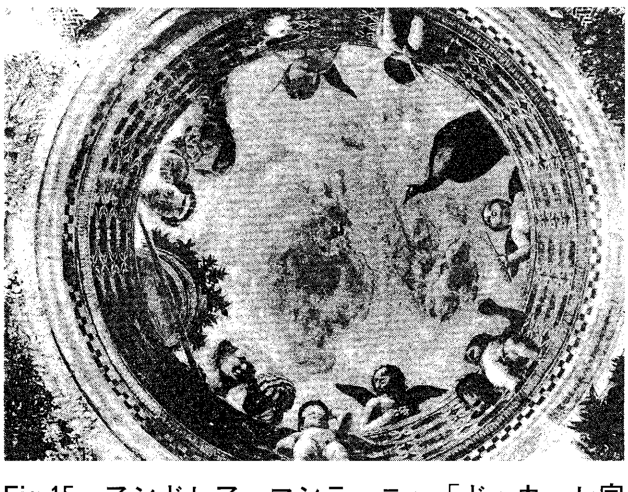

Fig.15　アンドレア・マンテーニャ「ドゥカーレ宮の天井画」[10]

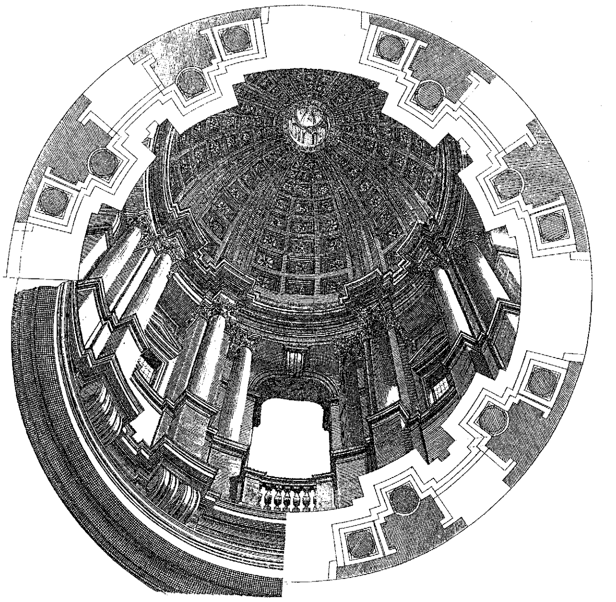

Fig.16　アンドレア・ポッツォ「絵画と建築の遠近法」[11]

代表される不規則な表面に天井画を制作したいと考えたときに、投影法に対して、最適な現代の道具であるコンピュータを活用して、簡単に制作できる方法を模索することであった。そのために周知のことでも、方程式をたて、変換式を提示し、コンピュータシミュレーションを行って全体の構図を考察した。

天井画制作の美術史的考察で、蝋燭と紐などを使用した、大変な労力のいる技法を解明することは、学問として価値があるのは自明のことであるが、本論ではあくまでも天井画の解析的知見を基礎としてコンピュータシミュレーションで、描画の手助けとなる制作基準格子を制作することに絞り、その目的は達成されたと考える。

注

1　金沢美術工芸大学紀要39号（1995年）
2　金沢美術工芸大学紀要44号（2000年）
3　JURGIS BALTRUšAITIS
ANAMORPHOSES ou Thaumaturgus opticus
（FLAMMARION, Paris, 1984年）
日本語訳；高山宏、『アナモルフォーズ光学魔術』1992年、国書刊行会　p. 102
4　Ibid., p. 104、図版
5　池上英洋：『イタリアに残る二つのアナモルフォーズ画をめぐって』「日伊文化研究」第38号、2000年
6　『視覚の魔術展図録』　p. 146、図版1994年
7　Ibid., p. 142、図版
8　種村季弘．高柳篤『だまし絵』河出文庫1987年、p. 41、図版
9　視覚の魔術展図録　p. 17、図版1994年
10　種村季弘．高柳篤『だまし絵』河出文庫1987年、p. 39、図版
11　『視覚の魔術展図録』　p. 160、図版1994年
12　種村季弘．高柳篤『だまし絵』河出文庫1987年、p. 37、注10の図版の説明文から引用

（いむら・としかず　図学）

（2002年10月31日受理）