

図学教育へのパーソナルコンピュータの利用について (8)
一視点設定による円筒鏡アナモルフォーザー

井村俊一

1. はじめに

前報¹では、緩慢な遠近法によるアナモルフォーズの解析と作画方法を提示した。そこでは透視図法（中心投象）の基本である視点（中心）の設定が重要な要素であった。表題のテーマでの紀要第3報²と第6報³で円筒鏡アナモルフォーズについての理論解析とコンピュータシミュレーションの結果を報告してきたが、そこでは理論解析の便宜と作画方法の実用化と実際の効果（一定視点による観賞は、特別な場合を除いて实际的ではなく、両眼で観る多視点観賞が通常）を考察した結果、視点の位置を設定せず、反射光学理論を適用して円筒鏡の鏡像を解析し、その理論によるコンピュータシミュレーションを主に行った。ところが、論文の中では、実用上問題なしとして視点設定による問題を敢えて言及しなかったが、講義の教材としてこの問題を解説する際、定性的な説明では説得力がなくて、定量的な説明の必要性が生じた。そこで、本報告では、上述の円筒鏡アナモルフォーズの理論に視点を導入した解析を行った。その結果と1630年代から種々試みられてきた視点設定の円筒鏡アナモルフォーズの解析図（説明が不明瞭で意味不明か、作図線の理由が理解困難）との比較を行って考察した。また、一定視点より多視点が現実的という理由で解析し、シミュレーションを行ってきた既報^{2,3}の妥当性が円筒鏡の前方に視点を置き、円筒鏡アナモルフォーズが正像（透視図）に見えるような視点位置、つまり、視高と視距離を視点を適当に移動することにより見いだす、そしてこのことを特に意識しないでやってきた実際の観賞方法の再認識と共に裏付けられた。

また、本報では、既報^{2,3} に比べて、数学等に不

慣れた作家や美術専攻の学生にも作画法の要点が理解し易いようにコンピュータシミュレーションの結果図を多数提示した。

2. 視点を設定した円筒鏡アナモルフォーズ

Fig. 1に視点の位置（視高，視距離）を設定した円筒鏡アナモルフォーズの解析座標図を示す。

$P_1(x_1, y_1)$ は正方形格子鏡像 $P_3(x_3, y_3)$ のアナモルフォーズである。また、 $P_2(x_2, y_2)$ は緩慢な遠近法による $P_3(x_3, y_3)$ のアナモルフォーズである。Fig. 2に正方形格子（透視図）と緩慢な遠近法によるアナモルフォーズ（原像；鏡像）の関係座標図を示す。

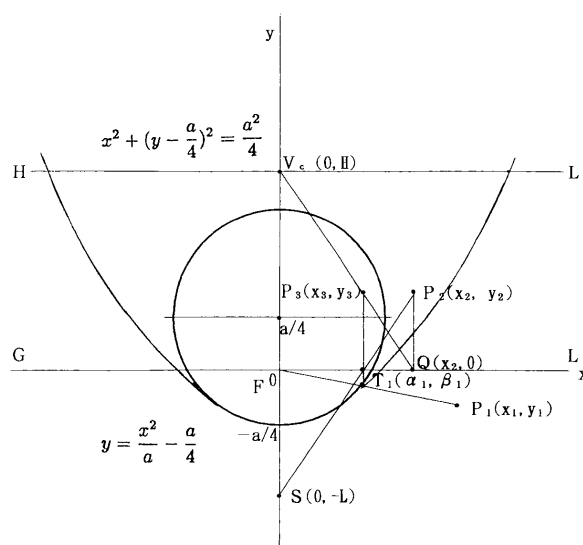


Fig. 1 円筒鏡による扇形セグメント格子（原像）と正方形格子（鏡像）の関係座標図 I

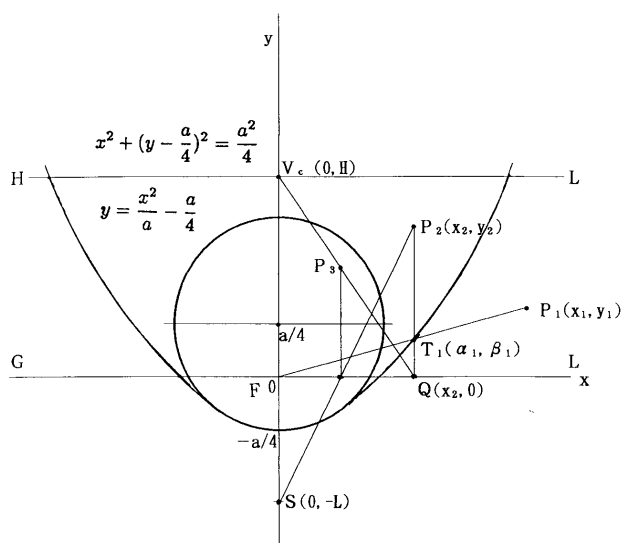


Fig. 2 緩慢な遠近法によるアナモルフォーズ（鏡像）と正方形格子（透視図）の関係座標図Ⅱ

Fig. 3は既報のシミュレーション図と比較するために同一座標に変換した関係座標図である。

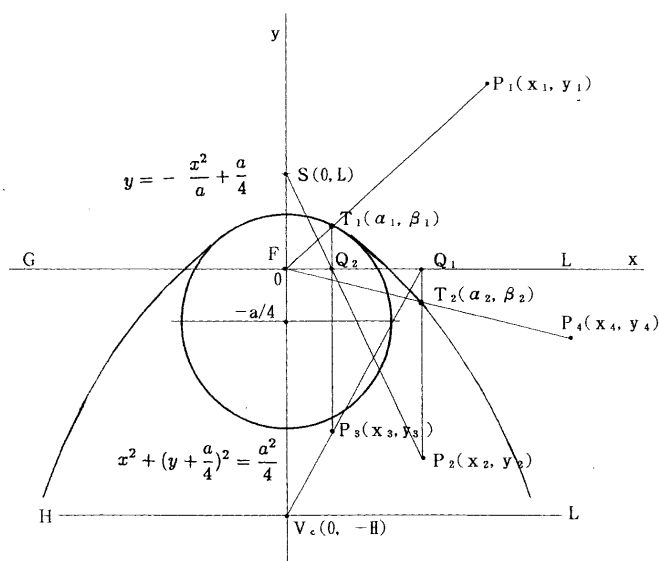


Fig. 3 比較検討用関係座標図Ⅲ

Fig. 1のように設定する。円筒鏡はあくまでも放物柱鏡（断面は放物線）の近似鏡として用いられている。放物柱鏡の断面の放物線の方程式は、 a を正方形格子で形成される正方形の一辺とすると、

$$y = \frac{x^2}{a} - \frac{a}{4}$$

近似円筒鏡の断面である円の方程式は、

$$x^2 + (y - \frac{a}{4})^2 = \frac{a^2}{4}$$

であり、

直線 \overline{VcQ} は、 $y = (-\frac{H}{x_2})x + H$

直線 $\overline{SP_2}$ は、 $y = \frac{y_2 + L}{x_2}x - L$

直線 $\overline{P_1T_1}$ は、 $y = (\frac{y_1}{x_1})x$

である。

ここで、

Vc ；視心、 S ；停点、 F ；座標原点かつ、放物線の焦点、 x 軸は、投象法にいう基線（ GL ライン） H ；視高、 L ；視距離 である。

Fig. 1, Fig. 2の座標を使ったコンピュータシミュレーション例をFig. 4～Fig. 6に示す。

Fig. 4は、緩慢な遠近法による正方形格子（透視図）のアナモルフォーズ（台形格子）である。台形の両側線を延長すると停点 S （ y 軸上）で交わる。停点 S 上、高さ H に視点を据えて、台形格子を観ると正方形格子（透視図）に見えるわけである。本設定では、 x 軸が画面の位置（基線）を示しているのので x 軸より停点側には、鏡像はできない。Fig. 5は、Fig. 4の台形格子（鏡像）と原像のシミュレーションを示す。歪んだ扇形セグメント格子を使ってアナモルフォーズである原画を描くことは、相当困難を伴うことが予想される。歪んだ扇形セグメント格子上のアナモルフォーズが円筒鏡の反射光学により、対応する台形格子上的絵（鏡像）になり、その鏡像を設定視点から見ると、緩慢な遠近法により対応する正方形格子上的正常な絵（透視図である絵）となるわけである。Fig. 6は、Fig. 4とFig. 5を総合してプリントアウトしたものである。

三つの図の相互関係が明らかである。放物柱鏡とその近似円筒鏡、そして放物線の焦点にあたる、座標系の原点、その原点を中心とした停点側の半円弧（原像）の鏡像は、 $-a/2 \leq x \leq a/2$ の範囲の x 軸が画面の位置を示す基線であるので、半円内には

鏡像が成立できないことを示す。後節で考察するが放物線と x 軸の交点付近から上の部分は、放物線と近似円の誤差が大きくなり本関係図の修正が必要である。

Fig. 1を参照して、
点 $P_2(x_2, y_2)$ と点 $P_3(x_3, y_3)$ の関係において、

$$\begin{aligned}\overline{P_1F} &= R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ \overline{TF} &= \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \\ R &= y_3 - \beta_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \\ x_3 &= \alpha_1 \text{より,} \\ \beta_1 &= \frac{\alpha_1^2}{a} - \frac{a}{4} = \frac{x_3^2}{a} - \frac{a}{4} \\ \text{かつ,} \\ R &= y_3 - \beta_1 + \sqrt{x_3^2 + \beta_1^2} \\ &\text{となる。}\end{aligned}$$

そこで変換式は、

$$\begin{aligned}x_2 &= x_3 \frac{y_2 + L}{L} \\ y_2 &= L \frac{y_3}{H - y_3} \\ \text{かつ,} \\ x_3 &= L \frac{x_2}{L + y_2} \\ y_3 &= H \frac{y_2}{L + y_2}\end{aligned}$$

ただし、透視図法から $y_2 > 0$ である。

次に、Fig. 2を参照して、

点 $P_2(x_2, y_2)$ と点 $P_1(x_1, y_1)$ の関係において、

$$\alpha_1 = x_2$$

$$\beta_1 = \frac{x_2^2}{4} - \frac{a}{4}$$

$$R = y_2 - \beta_1 + \sqrt{x_2^2 + \beta_1^2} \quad \text{で、}$$

$$x_1 = \frac{R \alpha_2}{2 x_2^2 - a \beta_1}$$

$$y_1 = \frac{x_1 \beta_1}{x_2}$$

となる。

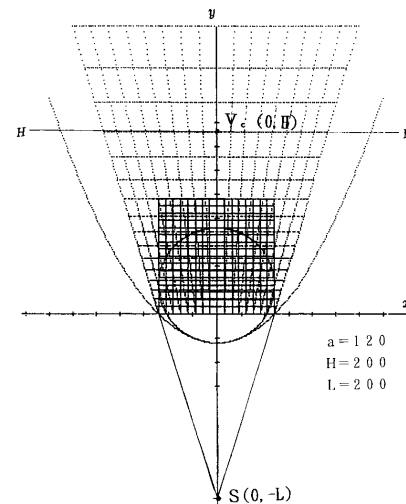


Fig. 4 正方形格子（透視図）と緩慢な遠近法によるアナモルフォース（鏡像）

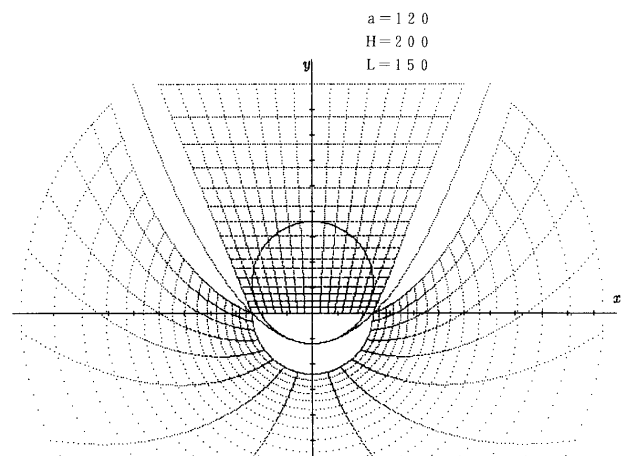


Fig. 5 緩慢な遠近法によるアナモルフォースと円筒鏡アナモルフォース

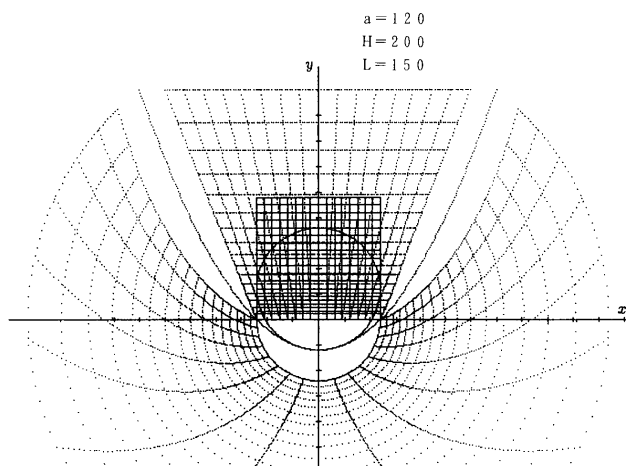


Fig. 6 2種類のアナモルフォースと透視図

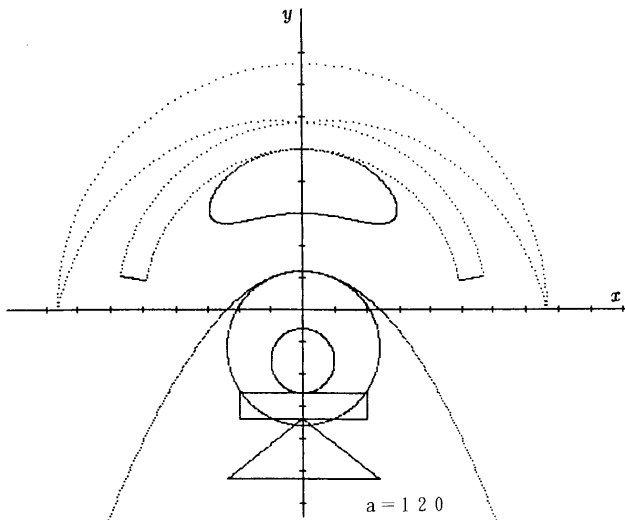


Fig. 7 複数の基本図形の複合形のアナモルフォーズ (視点設定なし)

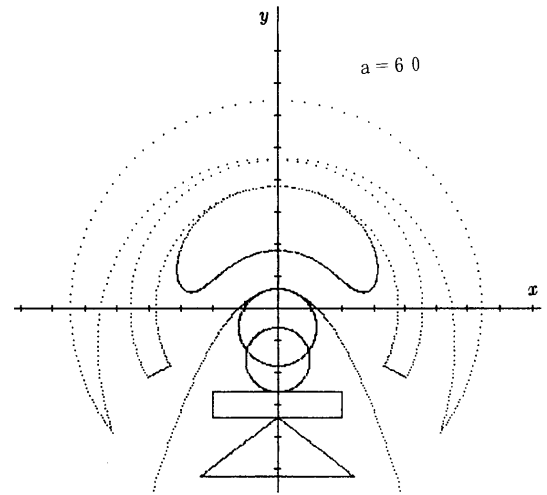


Fig. 9 複数の基本図形の複合形のアナモルフォーズ (視点設定なし)

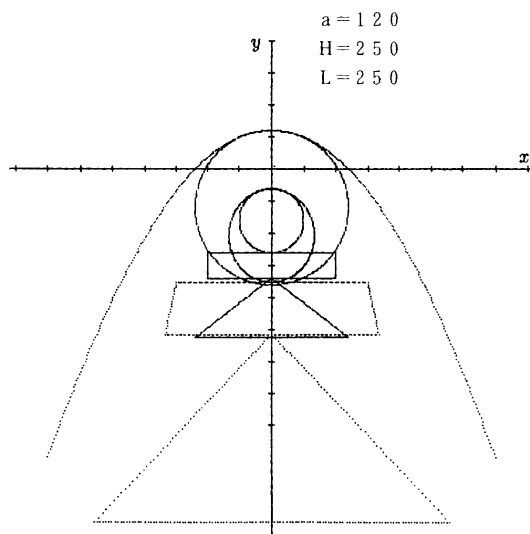


Fig. 8 緩慢な遠近法によるアナモルフォーズと透視図

Fig. 7は、既報³で報告した複数の基本図形を組み合わせた図形のアナモルフォーズで、視点の設定はない。Fig. 8は、同じ基本図形による複合形の視点を設定した場合の透視図と緩慢な遠近法によるアナモルフォーズ (鏡像) を示す。比較検討が容易にできるように既報³と同様なFig. 3に示す座標系をシミュレーションに採用した。

比較するためには、Fig. 7, Fig. 8と同じ正像 (透視図) と同一条件で円筒鏡アナモルフォーズを作成するのが統一的であるが、シミュレーションを行うと、アナモルフォーズが大きくなりディスプレイからはみ出したため、やむなく正像の大きさを小さくしたFig. 9の条件に設定し直して、シミュレーションを行った。Fig. 9の視点を設定しない相互関係図とFig. 10を比較すると、円筒鏡アナモルフォーズである原像は、視点を設定した場合は歪みが大きくなる。即ち、円筒鏡アナモルフォーズ → 緩慢な遠近法によるアナモルフォーズ → 透視図による正像。と段階を経るごとに大きなアナモルフォーズは、小さくなり透視図の正像へと変化する。それと比較して、視点設定がない場合は、透視図の正像に変化するのに一段階の変化しか経ていない。円筒鏡アナモルフォーズは、一段階分だけ小さい図形となるため、歪みも小さく、規則性が見られる。当然、このアナモルフォーズの方が、実用的で作成し易い。問題は、視点設定しないアナモルフォーズが現実そのものである視点設定アナモルフォーズに代替しても実用上さしつかえないことを証明する事であるが、このことは節を改めて検証する。

Fig. 11とFig. 12に“金沢美術工芸大学”の文字の両方のアナモルフォーズのシミュレーション結果

を示す。上述の場合と同様な結果が観察されるが、文字が対象の視点設定アナモルフォーズでは歪み度と形態が大きくなるので、できるかぎり文字形成点の刻みを細かくすることが、滑らかな文字アナモルフォーズ作成の要点となる。

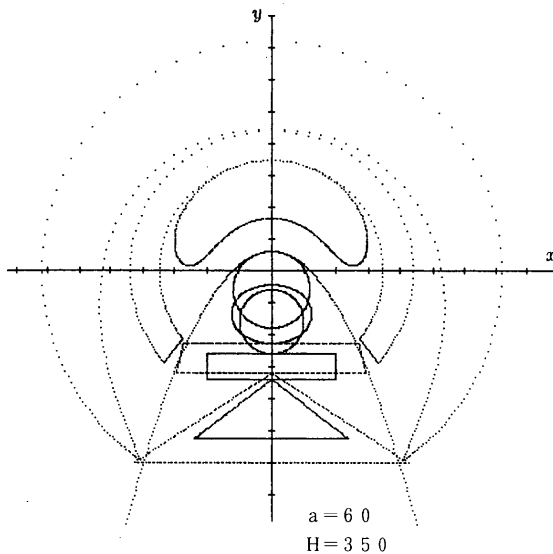


Fig. 10 複合図形のアナモルフォーズ間の相互関係（視点設定あり）

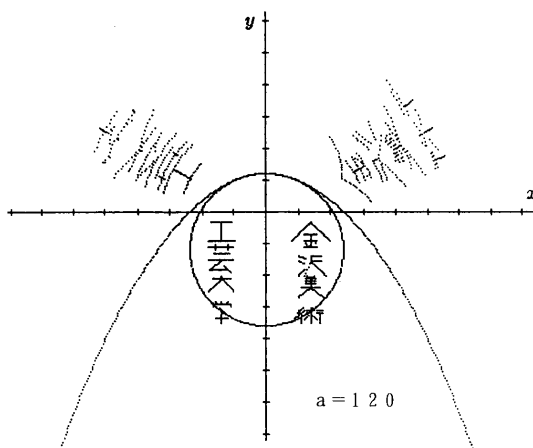


Fig. 11 文字アナモルフォーズ（視点設定なし）

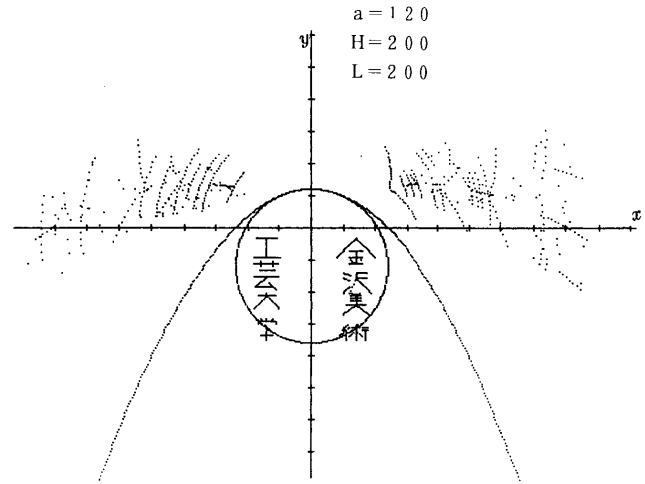


Fig. 12 文字アナモルフォーズ（視点設定あり）

3. 視点設定によるアナモルフォーズと視点設定なしのアナモルフォーズの考察

Fig. 13に視点設定しない正方形格子（鏡像）と扇形セグメント（円筒鏡アナモルフォーズ）の関係図を示す。次いで、Fig. 13の関係図に似た図になるように、視点の設定条件を種々変えてシミュレーションを行った結果をFig. 14, Fig. 15に示す。Fig. 14からFig. 15とFig. 13に似た形に近づき、Fig. 15ではほぼ似た形のシミュレーション結果が得られた。Fig. 15の設定条件は、視距離； $L=1250$ 、視高； $H=1350$ である。前報¹で考察した緩慢な遠近法によるアナモルフォーズの知見で明らかのように、視点の位置、即ち、視距離、視高で、一般的には視距離を小さく視高を高くとることにより歪み度が小さくなり、視点設定なしの場合と変わらなくなる。ただし、視距離と視高の組み合わせに注意が必要である。Fig. 15の場合は、図からわかるように円筒鏡の直径のほぼ10倍ぐらいの視高（視距離もほぼ同じぐらい）である。17世紀の前半頃からの円筒鏡アナモルフォーズの資料⁴から推定すると高々、直径10cm程度の円筒鏡が用いられていたようだ。そこで、視点の位置は、高々、視距離1m弱ぐらい、視高も1m程度で円筒鏡を正面の位置から覗き込む。このような条件では、鏡像として正像が見えること

になる。実際、観賞者は、上述の条件の位置に視点を移動し、適当に鏡像を見ながら、正像が見えるように視点の位置を調節する。このような手順がアナモルフォーズの楽しみ方の実際の形式といえる。

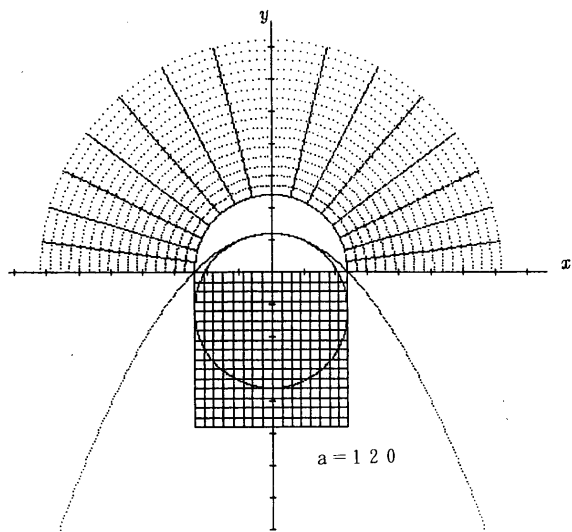


Fig. 13 正方形格子 (鏡像) のアナモルフォーズ (視点設定なし)

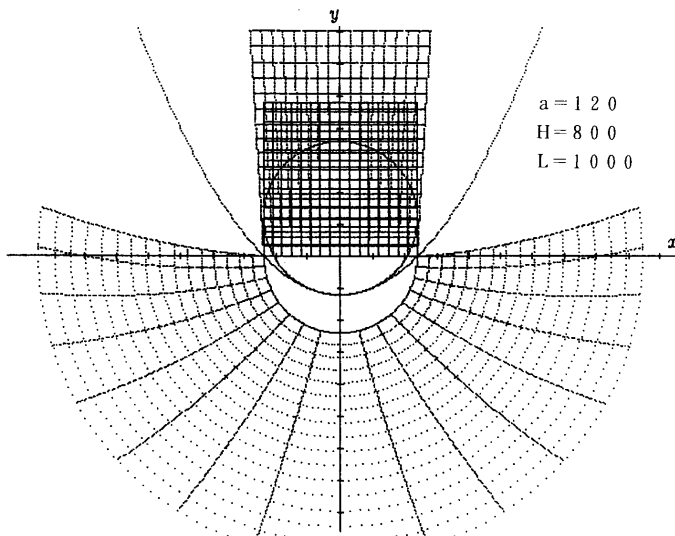


Fig. 14 正方形格子のアナモルフォーズ I (視点設定あり)

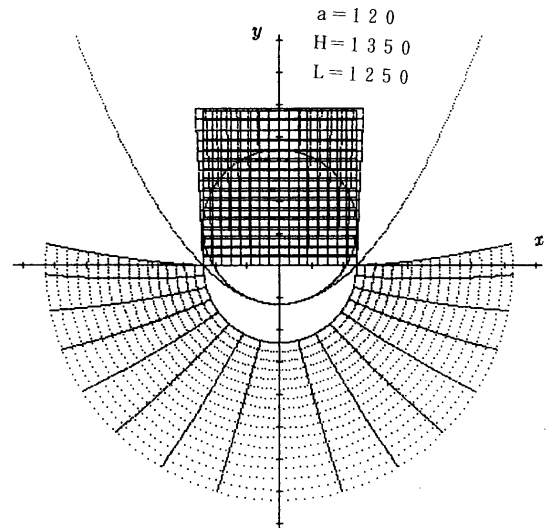


Fig. 15 正方形格子のアナモルフォーズ II (視点設定あり)

Fig. 16に前節の複合図形のアナモルフォーズの視点設定なしの場合に近づけた条件の関係図を示す。円筒鏡アナモルフォーズのスケールの大きい場合をFig. 17⁵に示す。写真から推測すると、視点の位置は、おそらく円筒鏡の前方の2階部分に設定されているであろう。

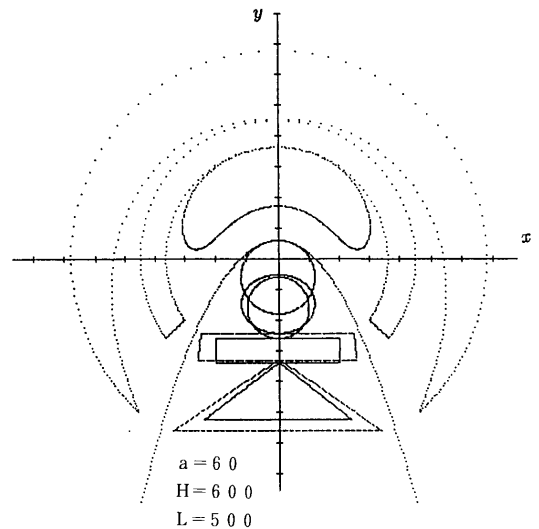


Fig. 16 視点なしに近づけた複合図形のアナモルフォーズの関係図



Fig. 17⁵ アナモルフォーズ広告 ノエル・ブロッ
テイ (1984 年)

4. 放物柱鏡と近似円筒鏡の考察

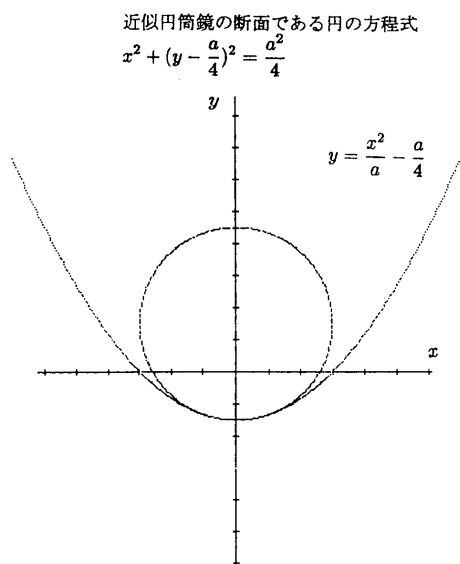


Fig. 18 放物柱鏡と近似円筒鏡の関係図

既報²に報告済であるが、視点を設定した円筒鏡アナモルフォーズの場合、一般的にアナモルフォーズ図形は大きくなり、円筒鏡の後半部にも図形が及

ぶので、放物柱鏡と近似円筒鏡の誤差が、大きくなる。特に、画面の位置 (x 軸に設定) より、後半部 ($y > 0$) では、放物線はなだらかに発散していくが、円では、閉曲線のため、光線の反射点は大きく変化する。つまり、この部分から後半部でのアナモルフォーズは、放物線の理論による図と、円による図とでは大きく相違する。理論上、アナモルフォーズのこの部分の処理が課題である。ところが、実際では、円筒鏡の側面部に鏡像が凝縮された形になり、その部分のアナモルフォーズになが描かれていてもあまり正像 (鏡像) に影響しない。それ故、描くときには、あまり注意する必要がない。

5. 視点を考慮した円筒鏡アナモルフォーズの幾何学の過去に研究された解析例

Fig. 19⁵ ~ Fig. 22⁵ に17世紀前半に研究された円筒鏡アナモルフォーズの幾何学の作図例を列举する。どの作図も筆者の浅学の故かもしれないが、何故このように作図するのか理論的な説明もなく、理解困難な図が殆どである。部分的に理解できる図もあるが、全体的にみるとやはり、理解困難になる。既報²でも指摘したことだが、断面が放物線になる放物柱鏡が円筒鏡アナモルフォーズの根幹であり、円筒鏡は放物柱鏡の単なる代用であり、円が放物線に近似するように円筒鏡を設定するわけである。筆者の理論では「円筒鏡アナモルフォーズである扇形セグメントの中心を放物線の焦点に設定して作図 (視点設定なしの場合) する。かつ、放物線近似円の中心を焦点の位置から円の直径の1/4だけずらして設定する。」と明瞭に説明できる。次いで、視点設定の場合は、この理論に透視図法の理論を組み合わせるわけである。このことに気づかず、円筒鏡に反射光学の理論を適用して作画するか、もしくは実際のアナモルフォーズと円筒鏡の鏡像との観察結果と反射光学理論との強引な組み合わせで導いた作画法などであれば部分的にはともかく、統一的に理解困難となるのは、当然の帰結と考えられる。

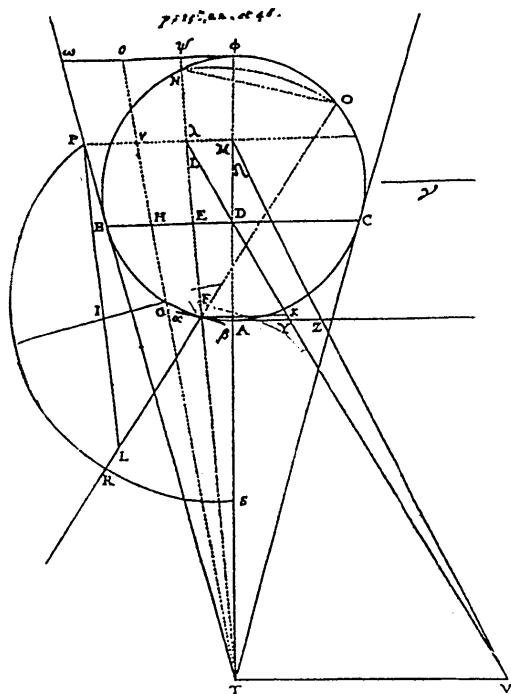


Fig. 19⁵ I・L・ヴォールザール円筒アナモルフォーズの幾何学 1630年頃

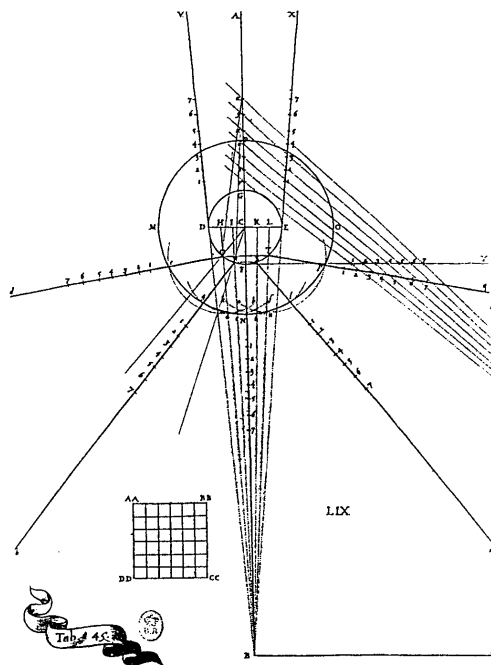


Fig. 21⁵ J=F・ニスロン, 円筒アナモルフォーズの幾何学 1638年

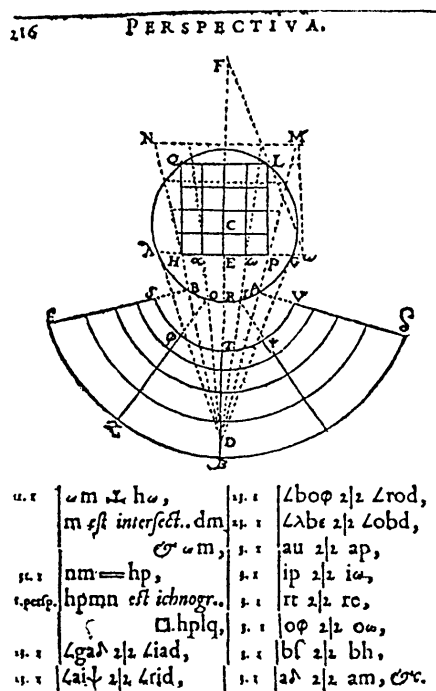


Fig. 20⁵ P・エリゴヌ, 円筒アナモルフォーズの幾何学, 1637 年

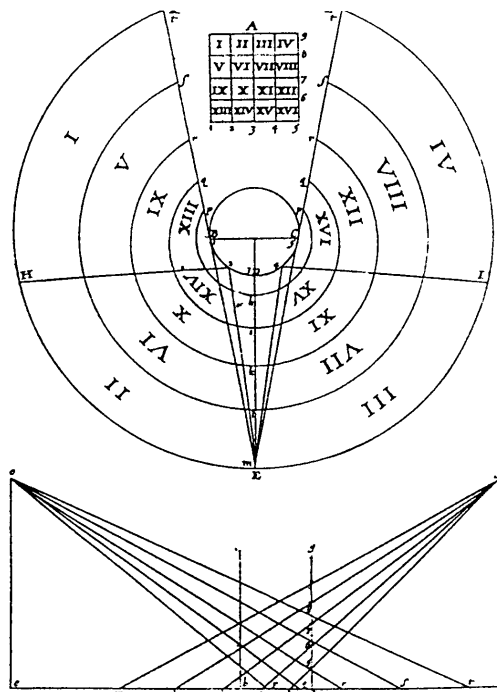


Fig. 22⁵ デュ・ブルイユ 円筒アナモルフォーズの幾何学 1649年

6. 結論

- ① 円筒鏡アナモルフォーズの作画方法は、正方形格子（透視図）上の正像をそれに対応する歪んだ形状の扇形セグメント格子上に移植する方法がとられる。アナモルフォーズを見て楽しむ見地から、アナモルフォーズに視点の位置を設定することは当然のことだが、配慮せずに視点位置を設定すると、扇形セグメント格子の歪みが大きくなり、それを使う作画が困難となり、正像の移植が難しくなる。本報告では、視高と視距離を適切に設定すると視点設定をしない場合の円筒鏡アナモルフォーズ（反射光学理論のみによる鏡像；規則性のある扇形セグメント格子使用による）とほぼ同様になることを検証し、同時にその時の視高と視距離がアナモルフォーズ観賞手順に適合することを、一般のアナモルフォーズ観賞手順を考察することにより、見出しした。故に、円筒鏡アナモルフォーズの作画方法として、視点設定抜きの作画が容易な規則性のある扇形セグメント格子を使ってもアナモルフォーズの楽しみが変わらないことを実証した。但し、本論における簡略的な「視点なし」あるいは「視点設定なし」の表現は、投象で、視点の位置を無限遠方に設定していることを示している。
- ② 視点設定による、円筒鏡アナモルフォーズの種々のシミュレーション結果から、既報^{2,3}で報告もれしていた問題（視点設定に対する考察）に、言及することができた。また、過去のアナモルフォーズ幾何学（全体的には誤りと考えられる）の作図の工夫の一端を理解することができた。

注

- 1 金沢美術工芸大学紀要第44号（2000）
- 2 金沢美術工芸大学紀要第39号（1995）
- 3 金沢美術工芸大学紀要第42号（1998）
以上，“図学教育へのパーソナルコンピュータの利用について 第7報，第3報，第6報”：井村 俊一
- 4 DISGUISED VISION：視覚の魔術展 図録（1994年）
神奈川県立近代美術館・東京新聞 企画・構成
発行：東京新聞
- 5 JURGIS BALTRUŠAITIS：ANAMORPHOSES ou Thaumaturgus opticus（FLAMMARION, Paris, 1984）
日本語訳：高山 宏 “アナモルフォーズ光学魔術”
1992 国書刊行会

（いむら・としかず 図学）
（平成12年10月27日受理）