

図学教育へのパーソナルコンピュータの利用について (7)

— 緩慢な遠近法によるアナモルフォーズの解析と作画法の提示 —

井村 俊一

1. はじめに

アナモルフォーズについての考察を主として種々の鏡面(円筒鏡、円錐鏡、四角錐鏡)¹についておこなってきたが、鏡面の場合、アナモルフォーズとそれに対応する鏡がないと楽しむことができない。上述の鏡は、それぞれ製作するのが容易でなくかつ、教材用に数を揃えることは難しい。

そこで、用具のいらないアナモルフォーズと線遠近法²(透視図法)の理解、即ち、アナモルフォーズの制作とその基礎となる線遠近法の理論を修得すること。その為に、バルトルシャイティスの用語を借りれば、“加速された遠近法”と“緩慢な遠近法”によるアナモルフォーズが本目的に適うと判断して検討した。加速遠近法は、ルネッサンス期の劇場舞台の奥行き。建築物の虚空間の生成。都市計画で道路等を徐々に狭める構成をして実空間より、錯覚により大きくみせる。このような3次元的目的の基本理論として利用され、アナモルフォーズというより誇張された遠近法というのが相応しい。それに対して緩慢な遠近法により、2次元で描かれたアナモルフォーズと固定視点からそれを見たときの差異は、教材に相応しいと考える。緩慢な遠近法は、遠近法の「遠くにある物体が小さく見える」を逆転して、遠くにあるものほど大きく描き(一種の逆遠近法)、それを遠近法の一定視点から見ると、正常な絵に見えることを演出する作画法である。アナモルフォーズの異常さと、それを視点から見ると正常な絵に変化することから、“奇妙な遠近法”といわれることもある。

本報では、緩慢な遠近法のアナモルフォーズを、便宜的に机上におくものを水平面アナモルフォーズ、

垂直の壁面に描くものを壁面アナモルフォーズとして分けて考察する。

2. 水平面アナモルフォーズ

このアナモルフォーズは、Fig.1に示されるように、机上に置かれたアナモルフォーズを机の一方の端に小孔の開いた板を立て、小孔(一定視点)からアナモルフォーズを眺めるものである。机上を使うことにより、視点の位置(視高、視距離)をある程度自由に変えることができる。

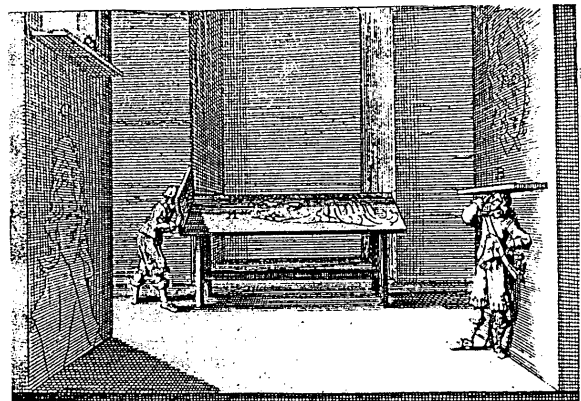


Fig.1 デュ・ブルイユ師 アナモルフォーズのキャビネ 1649年³

Fig.2に示されるアナモルフォーズ、Fig.3とFig.4に示される、アナモルフォーズとその作画法を検討すると、ニスロンによるFig.5が説明図として一番ふさわしい。この方法は、Fig.6に示されるレオナルド・ダ・ヴィンチ流の作画法に影響されていることは間違いのないと思われる。

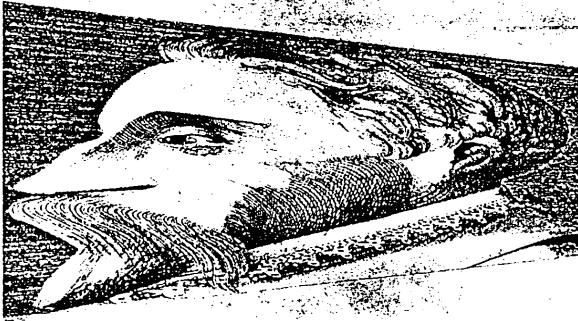


Fig. 2 J・シュトンメル画 1598年⁴

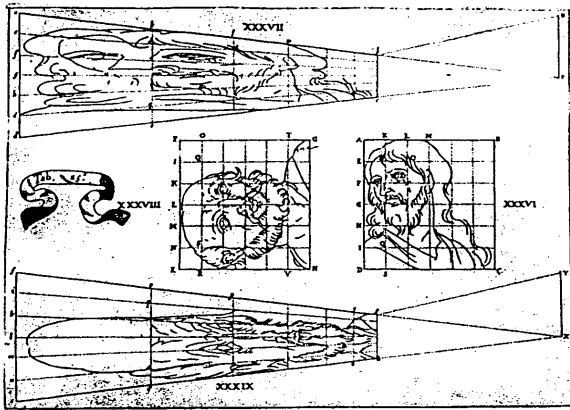


Fig. 3 ニスロン、頭部のアナモルフォーズ 1638年⁵

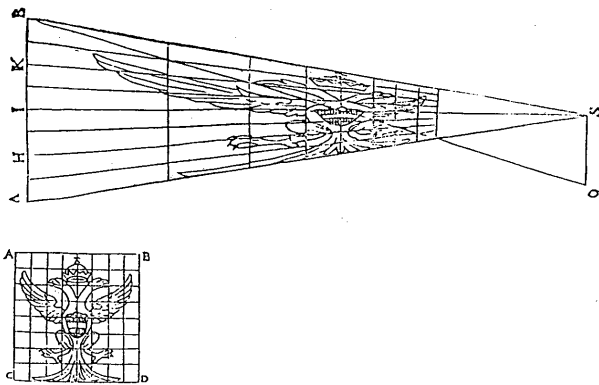


Fig. 4 アタナシウス・キルヒャーの
アナモルフォーズ 1646年頃⁶

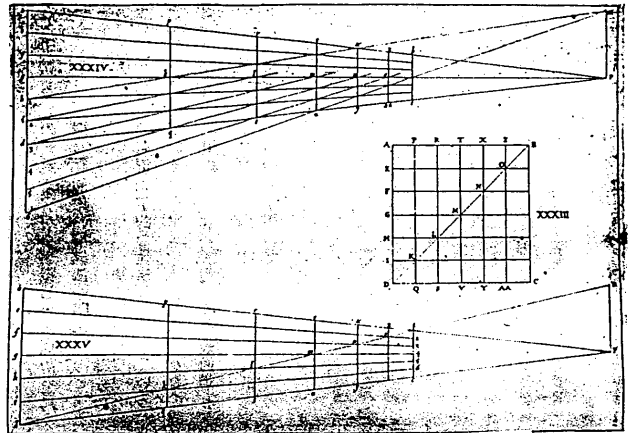


Fig. 5 ニスロンのアナモルフォーズ 1638年⁷

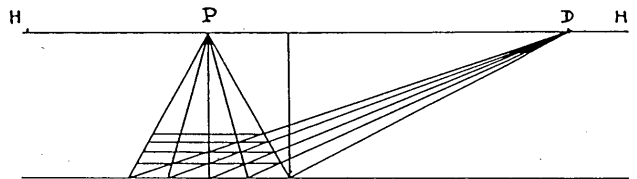


Fig. 6 正しき手法、レオナルド・ダ・ヴィンチ流
フランス学士院図書館蔵 Ms. A, 1492,
Fol. 42⁸

Fig.5を考察すると正方形格子がアナモルフォーズの台形格子に対応していることがわかる。正方形格子の対角線は台形格子の対角線に対応していて、台形格子の対角線は台形格子を含む三角形の頂点Pから一定の距離だけはなれたR点が発点になる。バルトルシャイティスによればPは基点（視点）になり、R点は距離点Dに相当するという。Fig.6のP（視心:消失点）とD（距離点）の逆転の構図という説明である。ここで、P（視心）は、水平線上の点であり、距離点Dは、Pから視距離だけ離れた点である。この図では、視点（あるいは停点）は明示されていない。そこで視距離が不明なので、D点を水平線上どこにとっても理論上正しい。Fig.5

ではFig.6の視心を頂点とした三角形と距離点に相当するR点が明示されていて、P点は視点（停点）と解釈されるが、R点は適当に示されている。P点を遠ざけ（二等辺三角形の頂角はより小さくなる）かつ、R点をP点に近づければ、アナモルフォーズ度は大きくなる。つまり、より引き伸ばされた形の台形が正方形格子に対応するわけである。この図では、停点や基線、水平線、視心の明示はない。このため、筆者は、Fig.7のように図学の講義で使用される図の形式に構成し、ニスロンの図の不明の項目を追加した。この図の解析で、点Pを点S（停点）から視高（H）だけ離れた位置にとれば、台形格子の対角線になることを代数的に検証した。即ち、ニスロンの図の点Rは、視高だけ離れた点である。距離点は、水平線上に視心から視距離の位置にとった点であるから、それぞれの図の点Pも点Rも距離点とは違う。 Fig.7では、台形格子、基線、の位置関係を視距離（L）と視高（H）、台形格子状原図の透視図にあたる正方形格子の一边をaとして、本図の基本数値 {H, L, a}として予め与え、計算し、図中に示した。基線（GL）に一致する正方形の辺ΩΦは原図であり、且つ、透視図でもある。S点から高さHの視点から、台形格子AIΦΩを見ると、正方形

格子が透視図として見えることになる。ここで、原図の台形格子は基面上に描かれている。

Fig.7のアナモルフォーズの台形が作図可能のためには、試行すれば容易に理解されるが、 $H > a$ である。 $a/2 \leq H \leq a$ の条件下のP点でも作図可能かと考えられるが、 $H = a/2$ で、PとΩを結ぶ直線は、視軸（SVc）と平行になる。また、P点が $a/2 < H \leq a$ のとき、PΩの勾配は、二等辺三角形の等辺の一つと平行か、それより勾配が大となり交点はなく、台形格子決定の対角線を引くことができない。つまりアナモルフォーズの作画は不可能である。

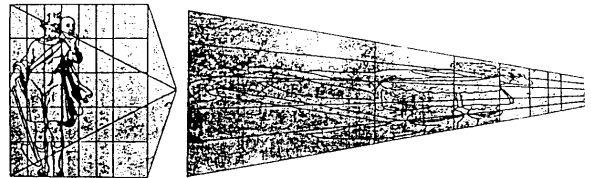


Fig. 8 サロモン・ド・コー、仮面を持つ役者のアナモルフォーズ 1612年⁹

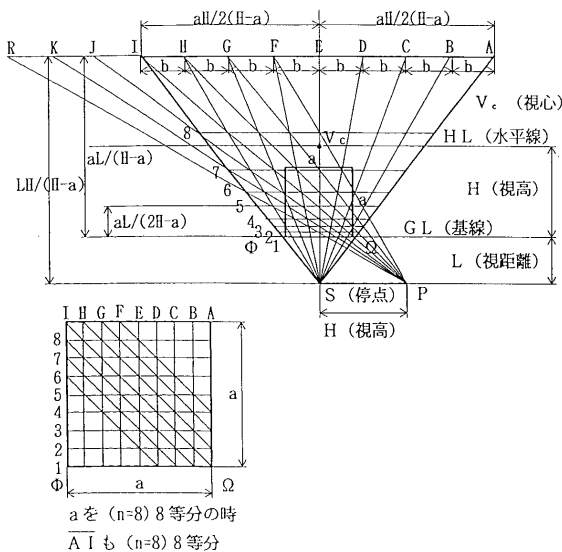


Fig.7 水平アナモルフォーズの作画法 I

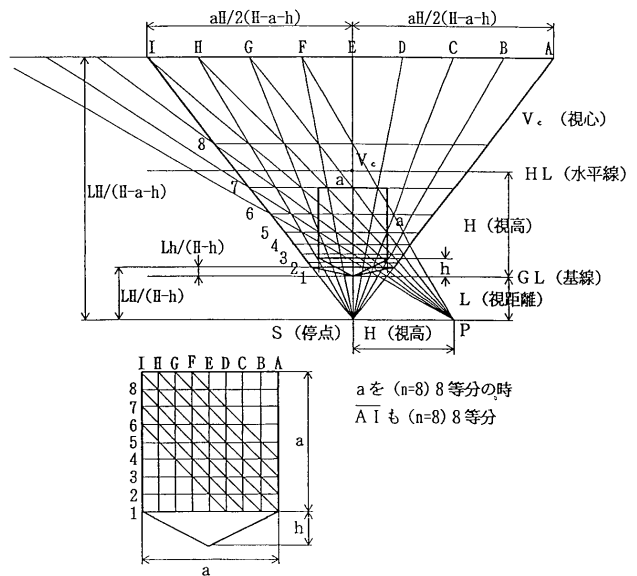


Fig.9 水平アナモルフォーズの作画法 II

Fig.8にサロモン・ド・コーが描いた作画方法を示す。正方形格子の透視図は、ニスロンの場合と異なり、正方形の一端に山形が作図されている。この理由を考察してFig.9に作画方法を示す。この方法は、透視図である正方格子が基線(GL)から h だけ離れている場合で、このとき、サロモン・ド・コーの作画方法が再現される。図中に、計算した台形格子の位置関係を数式の形で示す。この場合も、S点から H （視高）だけ離れたP点は、 $H > a + h$ を満足することが必要である。

3. 壁面アナモルフォーズ

メニャンの大型壁面アナモルフォーズの制作装置をFig.10に示し、次に、ニスロンが改良した方法をFig.11に示す。

壁面アナモルフォーズは、透視図法の基本原理そのものの作画方法であり、本形式は大型でないと思われ。現代にこの形式を再現する方法は、数値解析により各台形格子点の位置を計算して、矩形格子点との対応で作画することである。実現可能性として、ビル建築現場で危険防止のために道路沿いに築造される壁面が候補になる。このような場合を想定した解析図をFig.12に示す。ABは垂直壁面で、壁面上の基点AからMの距離に原図を描いた矩形格子(横; a 、縦; b)が、壁に垂直に取り付けられている。基点Aから壁に垂直に距離 H だけ離れた位置に視点Eを設定。視点Eの高さは格子矩形の midpoint ($b/2$) の位置に設定。台形格子点の位置決めのため対角線の原点Pは、E点より、 $X = (Hb/a)$ 離れた位置に ($a=b$ のときは、 $X=H$ となり、水平の場合と同様) なる。

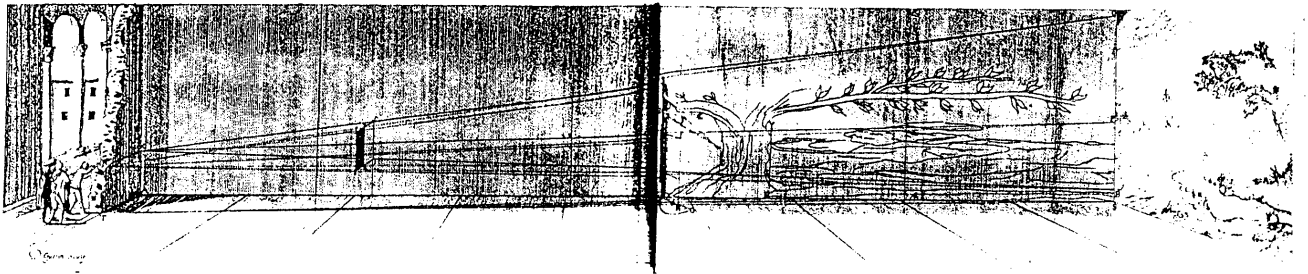


Fig.10 エマニュエル・メニャン、大型アナモルフォーズ、その装置と制作法 1648年¹⁰

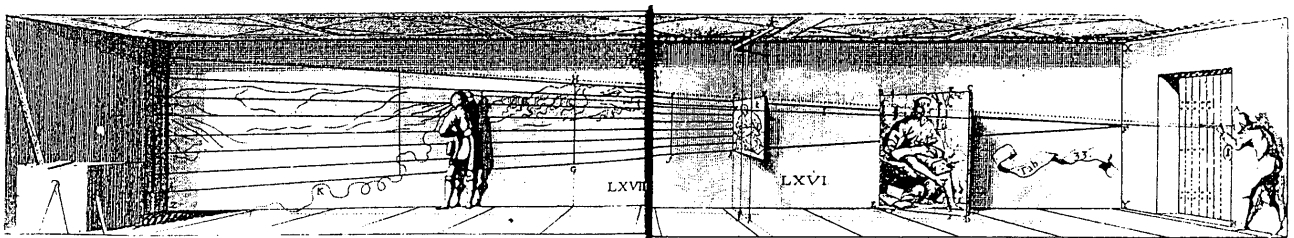


Fig.11 ニスロン、ローマ (1642年)、パリ (1644年) のミニモ会修道院の壁画¹¹

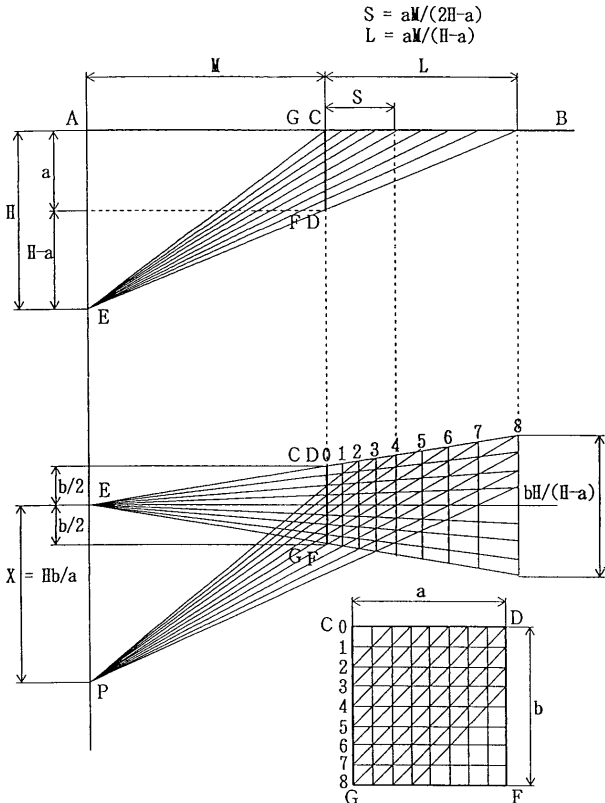


Fig. 12 壁面アナモルフォーズの作画法

解析図より、 $H > a$ は、容易に理解される。 H が a に近づくときアナモルフォーズ度は大となる。また、 M を大にしてもアナモルフォーズ度は大となる。台形格子の位置関係を、解析図に数式的形で示す。

4. 緩慢な遠近法アナモルフォーズの数学的解析

Fig. 7やFig. 8に示した水平面アナモルフォーズの作画法を座標解析で考察した。Fig. 13に解析座標を示す。

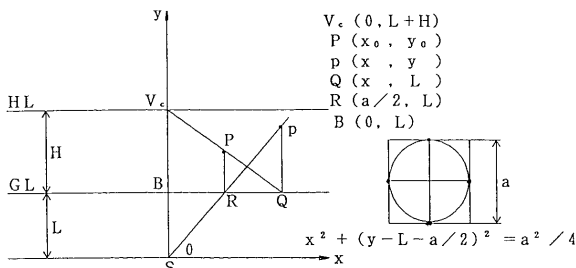


Fig. 13 解析用座標 I

Fig. 13で、点 $P(x_0, y_0)$ は、点 $P(x, y)$ の透視図である。点 $Q(x, L)$ は点 P の立面図。点 $R(a/2, L)$ は足点。点 V_c は視心、点 S は、停点。直線 V_cQ は目線、直線 SRP は足線。 H は視高。 L は視距離である。点 P のアナモルフォーズ、点 $P(x, y)$ を求める変換式は、

$$\begin{cases} x = \frac{-Hx_0}{y_0 - H - L} \\ y = \frac{-HL}{y_0 - H - L} \end{cases} \text{である。}$$

Fig. 7やFig. 9の作画法で台形格子を決定する P 点《距離点相当で本節の $P(x_0, y_0)$ とは違う》からの対角線が可能かどうかを考察すれば、 a （正方形格子の辺の長さ）と点 P までの距離 H の関係で、 $H > a$ と容易にわかるが、本節の方法では、わからない。そこで、正方形格子の代わりに円を考える。中心投影の代表である透視図は視点（中心）から放射された投射線（視線）による視錐を画面で切断したもの。というルネッサンス絵画の解釈（アルベルティ）²から、視点を頂点とした円錐を視円錐とみなし、円錐の中心軸に垂直な平面（画面）で切断すると円になる。切断角度に応じて、楕円、放物線、双曲線が現れる。即ち、円錐曲線（2次曲線）である。つまり、中心投影では画面の傾きにより、円が楕円、双曲線、放物線に投影されるということである。以上の理由から、透視図に正方形格子に内接する円を設定し、画面を傾けるかわりに視点の位置（視軸）を変える。このことは解析的にいえば、透視図である円の方程式と座標変換式により、円のアナモルフォーズの方程式を求めることである。変換式は、上記の

$$\begin{cases} x = \frac{-Hx_0}{y_0 - H - L} \\ y = \frac{-HL}{y_0 - H - L} \end{cases} \text{であり、}$$

円の方程式は、

$$x^2 + (y - L - a/2)^2 = a^2 / 4$$

以上から、アナモルフォーズは2次曲線で、

$$L^2 x^2 + H(H-a)y^2 + (a-2H)LHy + H^2L^2 = 0$$

となる。2次曲線の分類の理論から、

$$kx^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \text{ で}$$

$$D=kb-2hg^2-2bf^2-bg^2-ch^2$$

(1) $kb-h^2 > 0$ かつ、 $kD < 0$ で、楕円。

$$L^2 H (H-a) > 0 \text{ は、} H > 0 \text{ より、}$$

$$H > a \text{ となり、}$$

$$kD < 0 \text{ は、} k=L^2 > 0$$

$$D=-a^2 L^4 H^2 / 4 \text{ で } D < 0 \text{ となる。}$$

(1) の条件は $H > a$ で楕円となる。

(2) $kb-h^2 < 0$ で双曲線。この場合、

$$L^2 H (H-a) < 0 \text{ で、} H > 0 \text{ だから}$$

$$(H-a) < 0 \text{ 故に、} H < a \text{ となる。}$$

$0 < H < a$ で双曲線となる。

円という閉曲線に対応するアナモルフォーズが双曲線という発散曲線となり、これでは、アナモルフォーズを作画できない。

次に、壁面アナモルフォーズについて考察する。

Fig.12に示される作画法に準じて座標解析の検討図をFig.14に示す。

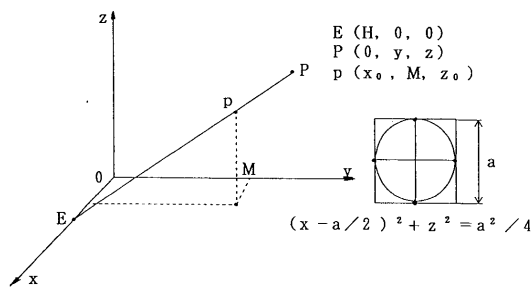


Fig.14 解析用座標Ⅱ

点 $P(0, y, z)$ は、点 $P(x_0, M, z_0)$ の透視図で、アナモルフォーズである。

直線 EP は、

$$\frac{x-H}{x_0-H} = \frac{y}{M} = \frac{z}{z_0}$$

座標変換式は、

$$\begin{cases} x=0, & y = \frac{-MH}{x_0-H} \\ z = \frac{-z_0H}{x_0-H} \end{cases} \text{ である。}$$

原図を下記に示す方程式の円にすると、

$$(x-a/2)^2 + z^2 = a^2 / 4$$

$$y=M$$

変換式より、アナモルフォーズの方程式は、

$$4H(a-H)y^2 + 4MH(2H-a)y - 4z^2M^2 - 4M^2H^2 = 0 \text{ ここで、}$$

$D=16M^4H^2a^2$ で常に $D > 0$ となる。(M, H, a ≠ 0)

(3) $kb-h^2=16HM^2(H-a)$ で、

楕円条件は、 $kD < 0$ で、常に $D > 0$ だから、

$k=4H(a-H) < 0$ でなければならない。

即ち、 $H > a$ で

$$kb-h^2=16HM^2(H-a)$$

上の条件では $kb-h^2 > 0$ となる。

故にアナモルフォーズは楕円となる。

(4) $H < a$ ($H > 0$) では双曲線となる。

Fig.12では、自明のことで不適である。

5. 椅子のアナモルフォーズ

Fig.15にニスロンによる椅子のアナモルフォーズを示す。本節では、ニスロンが省略したと思われる(?) 主要な基準線の名称とその他重要な説明を、ニスロンの図に忠実な参考図として、Fig.16に示す。Fig.17はニスロンの方法の理解の便宜のために単純な立方体をモデルとして作図法を示した。

ニスロンの図を見ると、イタリア・ルネッサンス期の画家たちは透視図法を主として3平面法で作図したといわれているが、参考図からも理解できるように、停点の表示さえあれば、現在の図法にほぼ一致する。椅子の立面図については、アナモルフォーズのために、視心 (V_c) と対象物が離れているので、立面図の寸法を左端の視軸上から導いている。

現在の図法では用いない、 V_c' (ニスロンの図ではT) を、左端 V_c に対して右端に設定し、椅子のアナモルフォーズの各部の高さを基線から確認し

ている。この図からもニスロンは、距離点、消失点（視心）の概念を正確に把握していたことがわかる。視野の中に納まった線遠近法絵画に対して、異端の適用であるアナモルフォーズでは作図法の理解の厳

密さが特に要求される。そこで、当時の線遠近法の理解度をアナモルフォーズやその作図法を検討することでより深く検証することができる。

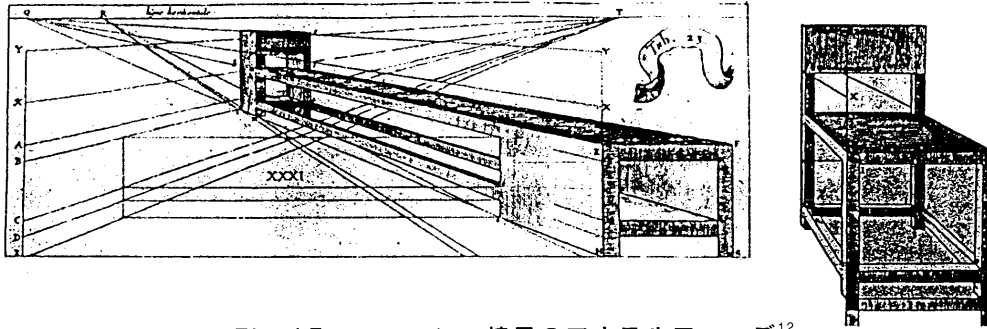


Fig. 15 ニスロン、椅子のアナモルフォーズ¹²

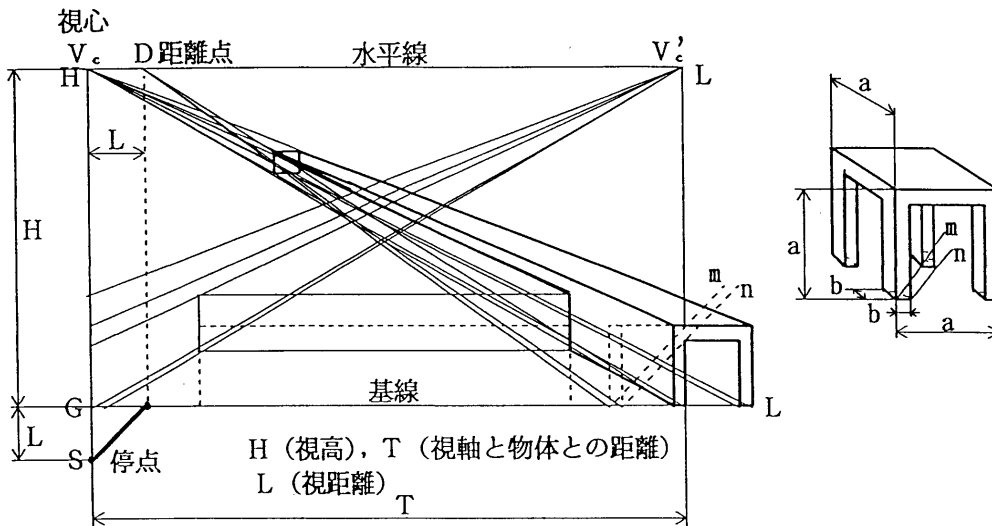


Fig. 16 椅子のアナモルフォーズ、参考図 I

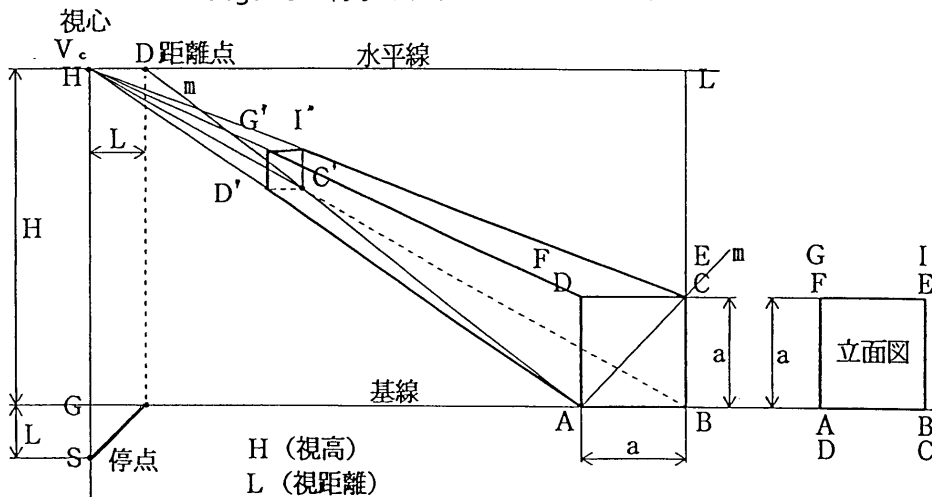


Fig. 17 椅子のアナモルフォーズ、参考図 II

6. アナモルフォーズのコンピュータ解析

4 節で解析した、水平面アナモルフォーズと壁面アナモルフォーズについて、座標変換式に従い、コンピュータプログラムを作成した。そして、条件を変えて検討を行った。まず、水平面アナモルフォーズについては一定の視点から眺めると円に見える(透視図)と、その原図(アナモルフォーズ)の関係のシミュレーションである。円の一端は、基線(GL)に接触している。例えば、円の半径を一定にして、視距離(L)、視高(H)をいろいろ変化させ、二つの図の関係を考察する。コンピュータ作図例をFig.18~Fig.21に示す。

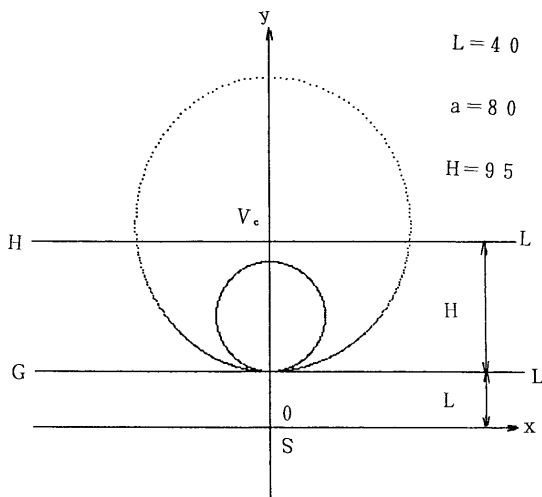


Fig.18 水平アナモルフォーズ I

Fig.18は最適なアナモルフォーズの条件を示している。即ち、視距離(L)と円の半径($a/2$)が一定という条件下で、視高(H)が、 $H > a$ で、 $H \rightarrow a$ になると、アナモルフォーズ度(絵の歪曲度)は高くなる。また、座標の変換の検討から、当然 $H \neq a$ である。Fig.19は、視距離(L)に照準をあて、変化させたものでLを大きくする、即ち、画面から視点を遠ざけると、台形格子が細長く、引き伸ばされた形になる。この場合もアナモルフォーズ度は高くなるが、原図の制作では、絵は細長く、作画しづらいと思われる。Fig.20は、Lを小さく、Hを大きく設定すると、原図は、偏平な楕円となり円と楕円の位置関係が逆転する部分が生じる。これは一種の逆

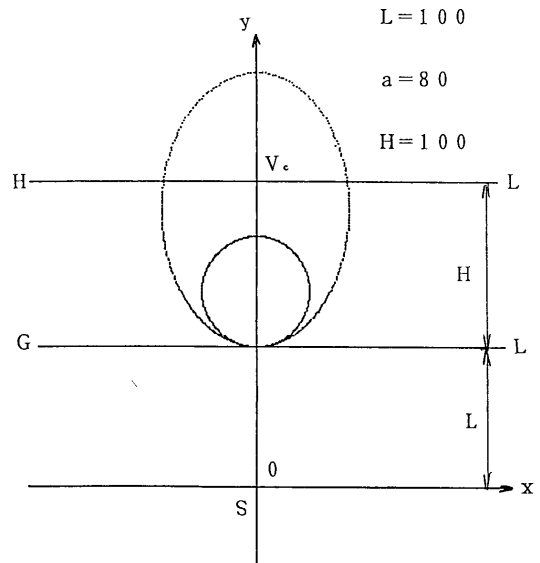


Fig.19 水平アナモルフォーズ II

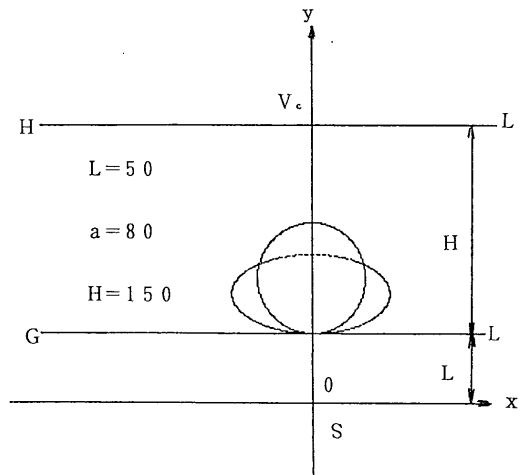


Fig.20 水平アナモルフォーズ III

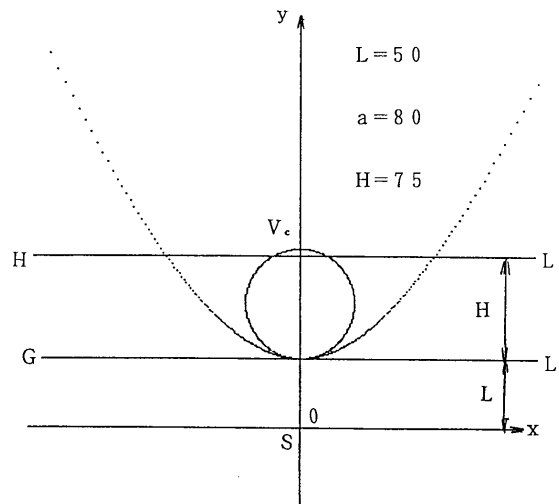


Fig.21 水平アナモルフォーズ IV

遠近の状態を示している。

Fig.21は $H < a$ の場合で、原図に相当するものは、発散する双曲線である。閉曲線の円に対応する曲線が、双曲線では、アナモルフォーズに不適當な設定となる。次に、壁面アナモルフォーズについてシミュレーションを行い、その例を、Fig.22～Fig.24に示す。これらの例で、原図は壁面に垂直な円で原点0から、 y 軸上に M だけ離れている。円の中心座標は、 $x = a/2$, $y = M$, 半径 $a/2$ である。原図の円は本来、 $x-z$ 面に表示すべきだがここでは便宜的に原図を90度回転して、アナモルフォーズと同様に $y-z$ 面に表示してある。即ち、原図円とアナモルフォーズは原点0から、 M の距離で接する図となる。Fig.22はアナモルフォーズ度は高く、壁面アナモルフォーズの条件を満たす図である。Fig.23は M に対して H を大きくするとアナモルフォーズ度は低くなる。Fig.24は視点を原図の内側になるように H をとった例($H < a$)で、アナモルフォーズは双曲線となり、不適當な条件である。以上、水平アナモルフォーズは視高 (H) と視距離 (L) が基本条件で壁面アナモルフォーズは視距離 (M) と、視点の偏向度 (H) が基本条件となる。両アナモルフォーズの変換式は同じ形なので、アナモルフォーズ作成可能の制限条件は、同様となり、原図と視点の関係は、 $H > a$ である。

7. 結論

- (1) 緩慢な遠近法による、水平面アナモルフォーズと壁面アナモルフォーズの解析を行い、ルネッサンス期に行われていた作画方法を検証し、現代流に再構成を行った。その結果、図学の教材として、ふさわしい内容をもつことを確認した。
- (2) 上述のアナモルフォーズの座標変換式を提示して、それにより、コンピュータシミュレーションを行って、視高 (H)、視距離 (L)、視点の偏向度とアナモルフォーズの関係を考察した。その結果、アナモルフォーズを作成する前に、コンピュータシミュレーションで、最適条件を決定

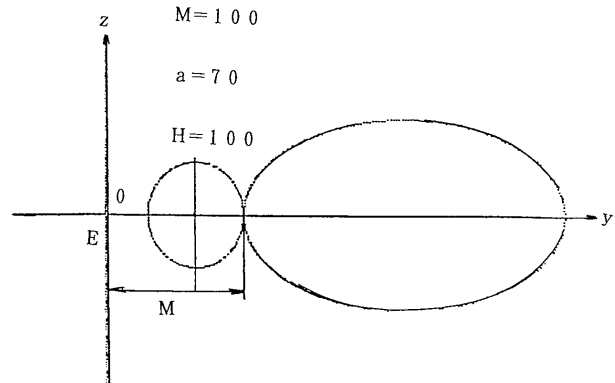


Fig.22 壁面アナモルフォーズ I

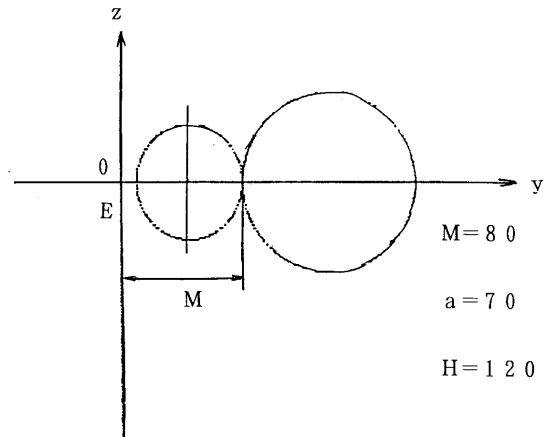


Fig.23 壁面アナモルフォーズ II

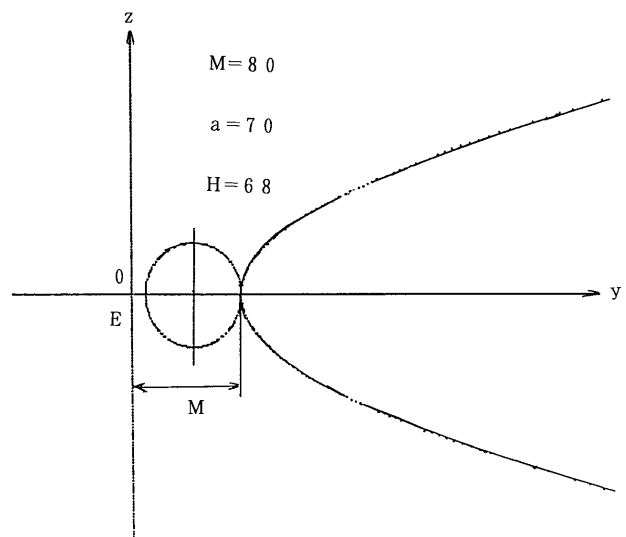


Fig.24 壁面アナモルフォーズ III

することができるようになった。

注

- 1 金沢美術工芸大学紀要第37号 (1993)
金沢美術工芸大学紀要第39号~42号
(1995~1998)
以上、“図学教育へのパーソナルコンピュータの利用について、2~6”
- 2 線遠近法はレオナルド・ダ・ヴィンチが初めて使用した用語といわれていて、数学的に言えば射影幾何学に基づく図法といえる。

図版出典

3~12
JURGIS BALTRUŠAITIS :
ANAMORPHOSES ou Thaumaturgus opticus
(FLAMMARION, Paris, 1984 日本語訳：高山 宏
“アナモルフォーズ 光学魔術” 1992 国書刊行会)

参考

『円錐曲線(2次曲線)と透視図法(中心投影)』円錐(視円錐)の切断面と円錐軸との関係を、Fig. 25に示す。本稿では、中心投影による形の変換のモデルとして、円を使うと投影面の傾き(視円錐の切断)による変換は、2次曲線の分類の問題になる。透視図法では、円と楕円(切断投影面が視円錐の底面を切らない場合)の変換が、図法としての理論範囲で、且つ、楕円も視野(Visual Field)内の範囲で作図、作画する。放物線や双曲線(投影面が視円錐の底面を切断する)の場合は、適用外となる。本稿のアナモルフォーズは、積極的に適用不適な視野外の楕円(誇張された楕円)を考察している。

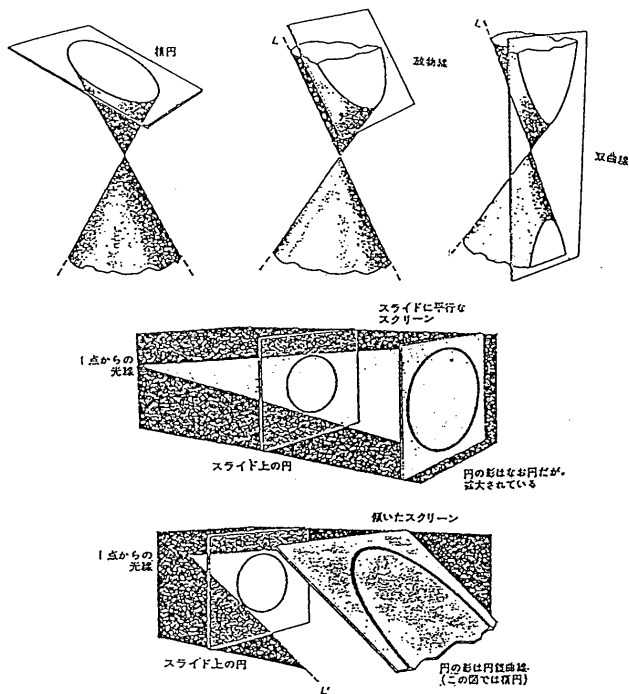


Fig.25 円錐曲線と透視図法

(いむら・としかず 図学)
(平成11年10月29日受理)