

図学教育へのパーソナルコンピュータの利用について(5)

ピラミッド鏡アナモルフォーズの理論解析とコンピュータシミュレーション

井村 俊一

1. はじめに

前報¹⁾に続いて、反射光学的アナモルフォーズであるピラミッド鏡アナモルフォーズについて、理論解析とそれに基づくコンピュータシミュレーションをおこなったので報告する。

ピラミッド鏡アナモルフォーズについて、バルトルシャイティスは彼の著書²⁾「アナモルフォーズ(光学魔術)」のなかで、1981年に発表されたハンス・ハムングレンの4点の作品³⁾を紹介し、イエズス会士 デュ・ブリユが1649年に著した「実践遠近法」を示唆して、その手法の出处に短くふれている。そしてその手法はめったに使われることがなかったと記述している。ハンス・ハムングレンが「実践遠近法」を承知していたかどうかは不明だが、好奇心旺盛な彼が何かの折りに偶然知った古い数学書で円筒鏡アナモルフォーズについての記述に興味を持ち、この技法は未だに知られていないという付記に触発され、その解決に専心し、円筒鏡アナモルフォーズの作品を発表している。(その手法についての詳しい解析がなされていなくて、描き方がパネルに記録されているのみであった。そこで厳密理論解析を筆者が行い既に報告⁴⁾している。) 彼は円筒鏡アナモルフォーズの研究の延長上でピラミッド鏡アナモルフォーズに手を染めたのであろう。

平面鏡の組み合わせで作られるピラミッド鏡アナモルフォーズは傾斜しているとはいえ平面鏡の容易さか、その描き方の手法も何も明らかにされていない。そこで、筆者はハンス・ハムングレンとは違い円錐鏡アナモルフォーズの理論解析の延長上で、その類似性から、理論解析を進めた。アナモルフォーズは平面鏡を媒介しているので、原像と鏡像との差異は他のアナモルフォーズに比べて激しくはない。

そこで、アナモルフォーズの最初の出発点としては適当な教材であると考えられる。バルトルシャイティスも記述しているように、部分化されて四方に散った手や目や頭部がピラミッド鏡によって中心に集められて、通常の絵になる様子は他のアナモルフォーズに比較して洗練された感じを与える。

2. ピラミッド鏡アナモルフォーズの理論解析

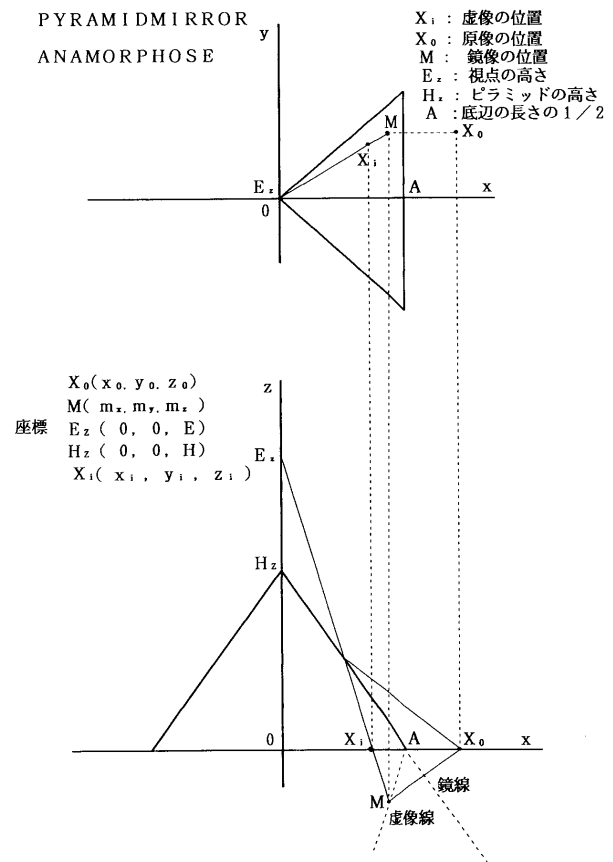


Fig. 1 ピラミッド鏡 アナモルフォーズの理論解析図

平面上の点 X_0 (原像) の傾斜平面鏡による鏡像 M は平面鏡の側面図により、

$X_0(x_0, y_0, 0)$, $M(m_x, m_y, m_z)$ として、円錐鏡アナモルフォーズの解析と同様に、

$$m_x = \frac{x_0(A^2 - H) + 2AH^2}{A^2 + H^2}$$

$$m_y = y_0$$

$$m_z = \frac{2AH(A - x_0)}{A^2 + H^2} \quad \text{となる。}$$

次に視点の位置を Z 軸上、高さ E_z にとると、 X_0 点の鏡像 M を像としては $x y$ 平面 ($z=0$) 上に見ることになる。即ち、 E_z 点と M 点を結ぶ線分 (視線) が $x y$ 平面で切断される点を虚像として認識するのである。

E_z 点と M 点を結ぶ視線の方程式は媒介変数を t として、

$$x = m_x t$$

$$y = y_0 t$$

$$z = E + (m_z - E) t$$

$x y$ 平面上の虚像の位置を $X_i(x_i, y_i, z_i)$ とすると、

$$t = \frac{E}{E - m_z}, \quad x_i = \frac{Em_x}{E - m_z}$$

$$y_i = \frac{Ey_0}{E - m_z}, \quad z_i = 0 \quad \text{となり、}$$

$$x_i = \frac{E\{x_0(A^2 - H) + 2AH^2\}}{E(A^2 + H^2) - 2AH(A - x_0)}$$

$$y_i = \frac{E(A^2 + H^2)y_0}{E(A^2 + H^2) - 2AH(A - x_0)}$$

$$z_i = 0 \quad \text{となる。}$$

以上が、原像の座標から虚像の位置を求める変換式である。また、逆に虚像の座標から原像の位置を求める変換式は、

$$x_0 = \frac{Ex_i(A^2 + H^2) - 2AH(Ax_i + EH)}{E(A^2 - H^2) - 2AHx_i}$$

$$y_0 = \frac{y_i\{E(A^2 + H^2) - 2AH(A - x_0)\}}{E(A^2 + H^2)}$$

$z_0 = 0$

となる。

3. ピラミッド鏡アナモルフォーズの作品例

ハンス・ハムングレンは1981年にピラミッド鏡アナモルフォーズの洗練された作品³⁾を発表している。Fig. 2~Fig. 5に示す。このアナモルフォーズは作品を参照すれば了解できるように原像の歪みは小さい。そのため、特徴さえ把握すれば容易に描けるのではないかと考え、教育用にアナモルフォーズの種々の特徴が容易に理解できるように多数のコンピュータシミュレーションを行った。



Fig. 2 ハンス・ハムングレンの作品 I



Fig. 3 ハンス・ハムングレンの作品 II

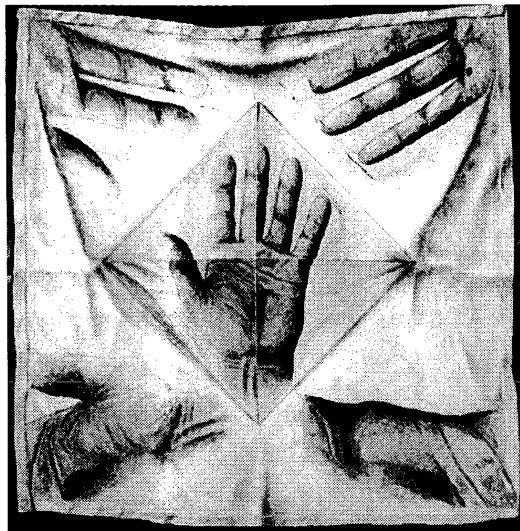


Fig. 4 ハンス・ハムングレンの作品 III

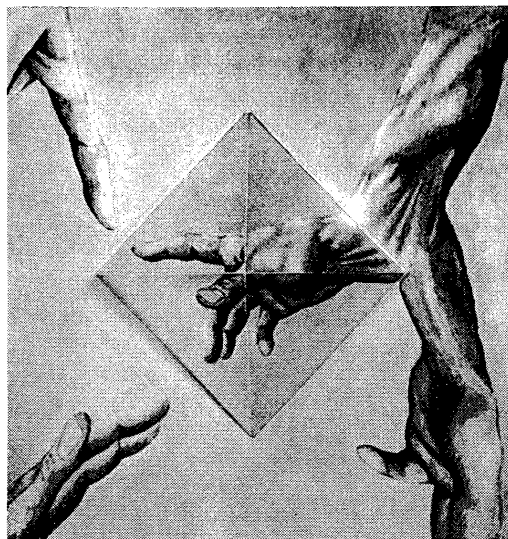


Fig. 5 ハンス・ハムングレンの作品 IV

4. プログラムの作成手順

1) 原像と鏡像の変換式における基本的な位置関係

ピラミッド鏡の中の一枚の鏡をFig. 6 に示される位置に設定し、変換式が導かれている。

ピラミッド鏡アナモルフォーズはFig. 7 の配置になる。歪み絵が第1象限から第4象限までの象限に描かれようと、その絵を必要な角度だけ回転し、Fig. 6 の位置になるようにプログラムは設定されている。そして、原像と鏡像の座標変換を行う。その後、それぞれの座標を元の位置まで、回転する。Fig. 8 は、第1象限から第4象限まで

鏡像が円のとときの原像の状態をシミュレートしている。

シミュレーションのときの条件設定で、ピラミッド鏡の底辺 ($2A$)、ピラミッドの高さ H_z (H)、視点の高さ E_z (E) は、

$$2A = 200, H = 170 \sim 180, \\ E = 250 \text{ 程度を標準とした。}$$

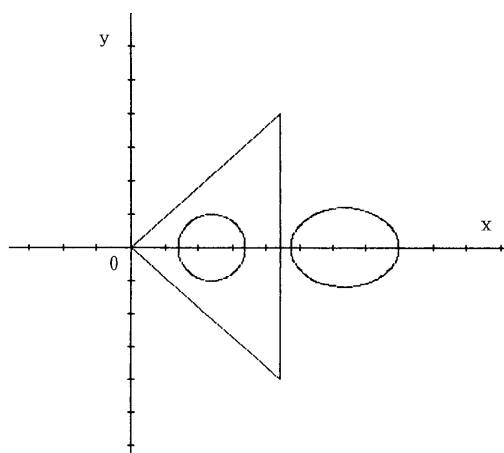


Fig. 6 原像と鏡像の基本的な位置関係
鏡像：円

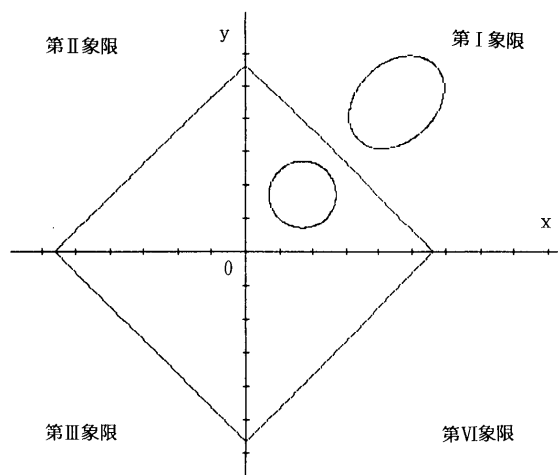


Fig. 7 回転後の原像と鏡像の位置関係

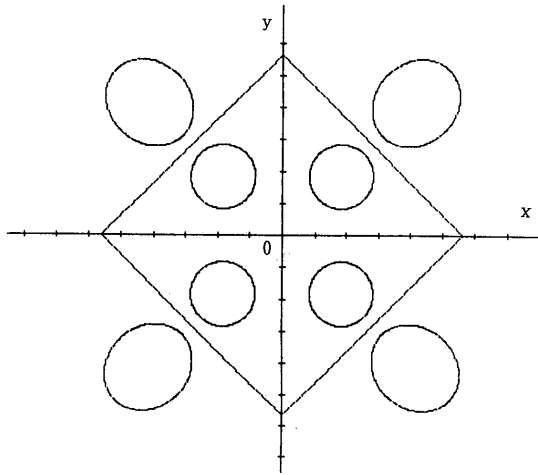


Fig. 8 ピラミッド鏡での原像と鏡像

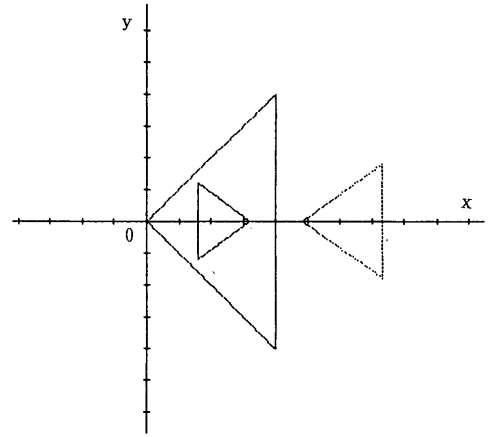


Fig. 9 原像と鏡像の基本的な位置関係
鏡像：三角形

5. シミュレーションの例

基本的な図形のシミュレーションを示す。俗に、形の基本である、丸、三角、四角を採り上げた。(Fig. 9～Fig.17 参照。)

Fig.18 は基本図形の組み合わせ例である。

Fig.19 は金沢美大の文字を表現するため鏡像に金沢美大と表記し、その文字をディスプレイ上のピクセルに対応する座標で読み取り、データファイルを作成して、変換プログラムに入力した。省略や対称関係なども利用し、ドットマップ形式にした。このドットは完全な文字のアナモルフォーズを表示することよりも、このドットの特徴から、アナモルフォーズを理解し、手書きで表現するガイドとすることが主目的である。Fig.20 はドットをガイドとして作成した金沢美大の文字のアナモルフォーズである。Fig.21 は少し複雑な文字のアナモルフォーズである。

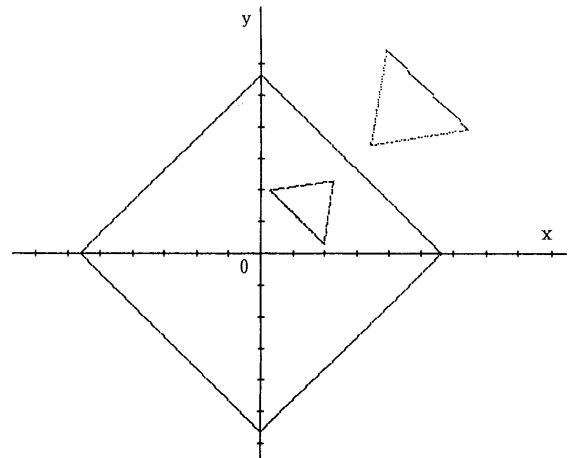


Fig. 10 回転後の原像と鏡像の位置関係

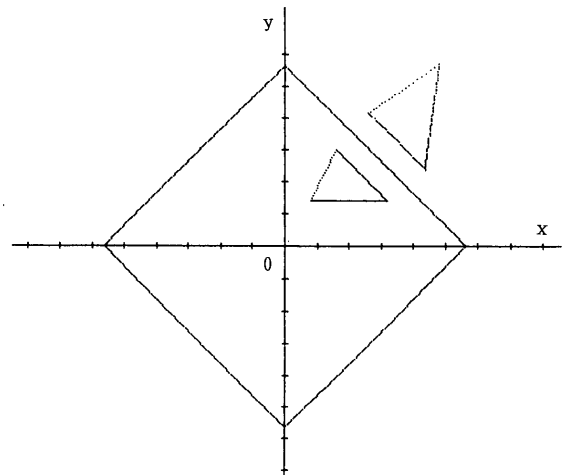


Fig. 11 三角形のアナモルフォーズ

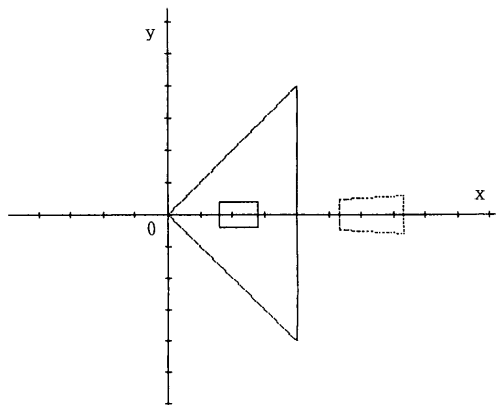


Fig. 12 原像と鏡像の基本的位相関係
鏡像：矩形

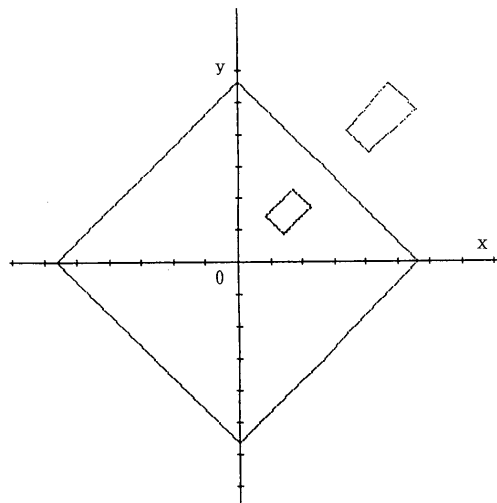


Fig. 13 回転後の原像と鏡像の位相関係

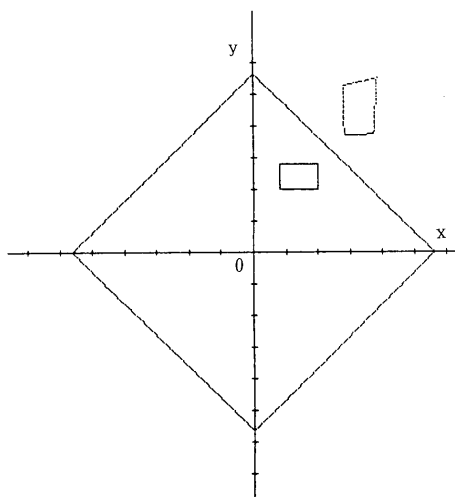


Fig. 14 矩形のアナモルフォーズ

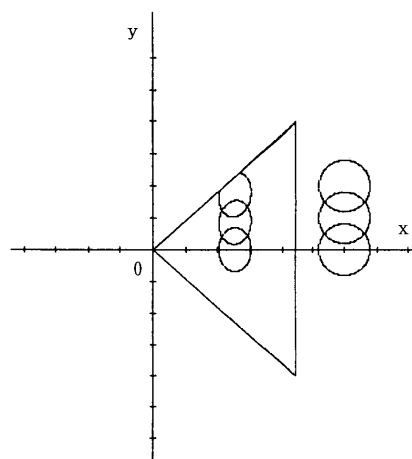


Fig. 15 3円のアナモルフォーズ (原像：円)

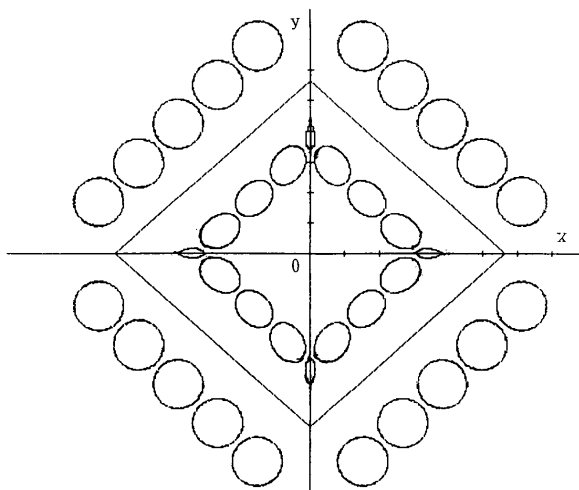


Fig. 16 5円のアナモルフォーズ (原像：円)

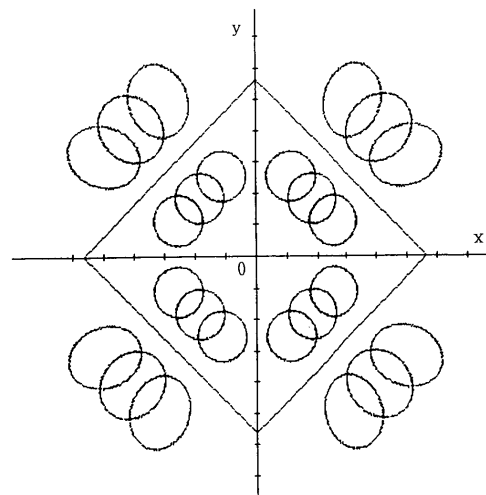


Fig. 17 3円のアナモルフォーズ (鏡像：円)

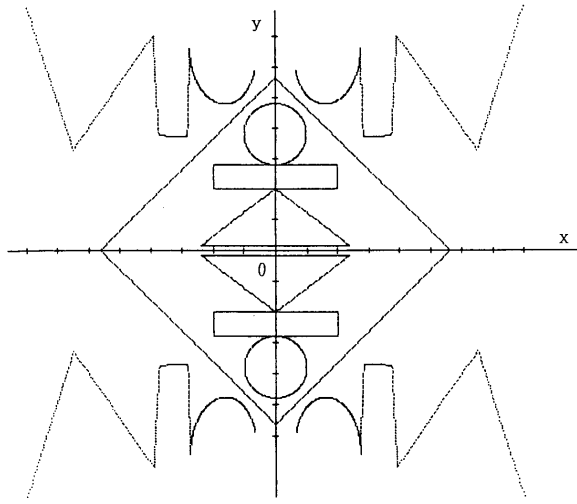


Fig. 18 複数の基本図形のアナモルフォーズ

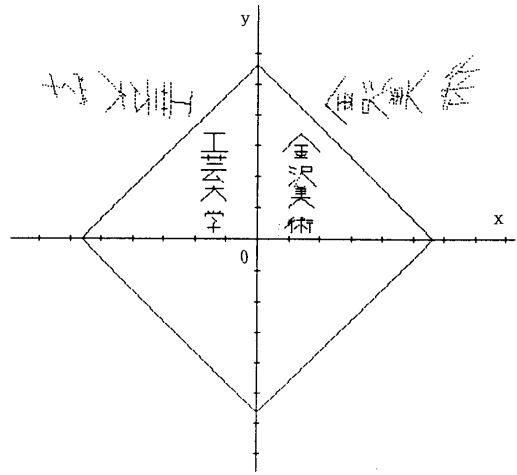


Fig. 21 文字のアナモルフォーズ III

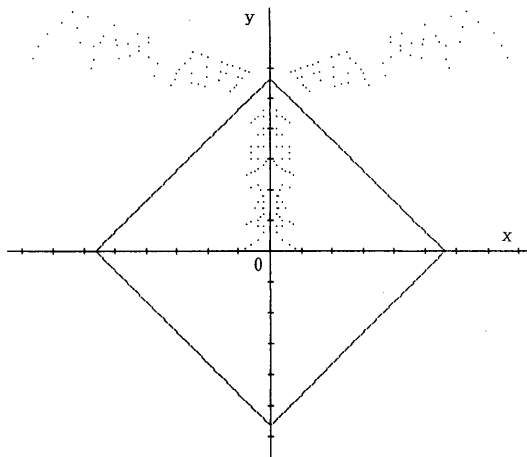


Fig. 19 ドットによる文字表示 I

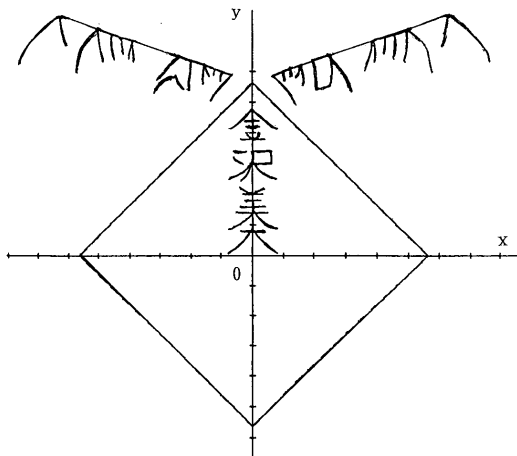


Fig. 20 文字のアナモルフォーズ II

6. 結論

(1) ピラミッド鏡によるアナモルフォーズを理論解析して、鏡像と原像の間の変換式を導いた。次に、変換式により、コンピュータシミュレーションを行い、アナモルフォーズの程度や特徴を考察した。

(2) 原像と鏡像（虚像）の変換式は、原像の座標を $X_0(x_0, y_0, 0)$ として、鏡像の座標は、 $X_i(x_i, y_i, z_i)$ として

$$x_i = \frac{E\{x_0(A^2 - H^2) + 2AH^2\}}{E(A^2 + H^2) - 2AH(A - x_0)}$$

$$y_i = \frac{E(A^2 + H^2)y_0}{E(A^2 + H^2) - 2AH(A - x_0)}$$

$$z_i = 0$$

鏡像から原像への変換式は、

$$x_0 = \frac{Ex_i(A^2 + H^2) - 2AH(Ax_i + EH)}{E(A^2 - H^2) - 2AHx_i}$$

$$y_0 = \frac{y_i\{E(A^2 + H^2) - 2AH(A - x_0)\}}{E(A^2 + H^2)}$$

$$z_0 = 0$$

となる。

(3) ピラミッド鏡アナモルフォーズは歪みの程度があまり大きくないので、アナモルフォーズの初歩

として、教育的にふさわしい。

- (4) 参考までにプログラム例をFig.22~Fig.25に示す。Fig.22はデータファイルの作成プログラム例、Fig.23はデータファイルから、データを読みこむプログラム例、Fig.24はデータファイルから、文字を出力するプログラム例である。

```

Program { DATA FILE の作成 }
uses CRT;
var
  INPUT : text;
  TextBuffer:string[128];
  FileName :string[12];
  x,y,i : integer;
  Empty :BOOLEAN;
begin
  ClrScr;
  Write('Fileの名前: ');
  Readln(FileName);
  Assign(INPUT,FileName);
  Rewrite(INPUT);
  Write('x y z x y z x y z x y z x y z x y z');
  Writeln('x y z x y z x y z x y z x y z x y z');
  Readln(TextBuffer);
  Empty := (TextBuffer='');
  While Not Empty do
  begin
    Writeln(INPUT,TextBuffer);
    Readln(TextBuffer);
    Empty:=(TextBuffer='');
  end;
end;
Close(INPUT);
End.

```

Fig. 22 DATAFILE の作成プログラム例

```

program Writing MOZI : {ピラミッド 4鏡 アナモルホーズ: B I D A I 文字 }
uses
  Graph,Crt;
const
  X0=220,Y0=200,L=25,A=100,H=170 : E=50,M=65,D=60; p=56;
  Green =2;Red=4;Yellow=14;LightBlue=9;V=50; Dist=0.9; { X軸の縮率 }
var
  GraphDriver,GraphMode,ErrorCode,N,N1,N2,S,GX1,GX2,GX3,GX4,X,Y,Y4,Z,I:integer;
  INPUT:text;FileName:string[12];
  L1,S1,X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,X5,Y5,ALPH:real;
begin
  GraphDriver :=Detect;
  InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'A:YDRIVERS');
  ErrorCode:=GraphResult;
  if ErrorCode<>Grok then
  begin
    Writeln('Graphics error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));
    Writeln('Program aborted...');
    Halt(1);
  end;
  For N:=8 to 14 do
  begin
    L1:=L*Dist; GX1:=Round(N*L1);
    Line(X0+GX1,Y0-2,X0+GX1,Y0+2); { X軸の目盛り }
  end;
  For N1:=8 to 6 do
  begin
    Line(X0-2,Y0-N1*L,X0+2,Y0-N1*L); { Y軸の目盛り }
    Line(X0,1,X0,395);Line(1,Y0,620,Y0); { X軸,Y軸 }
    S1:=Sqrt(A*A+A*A); S:=Round(S1); GX2:=Round(S1*Dist);
    Line(X0+GX2,Y0,X0,Y0-S);Line(X0,Y0-S,X0-GX2,Y0);Line(X0-GX2,Y0,X0,Y0+S);
    Line(X0,Y0+S,X0+GX2,Y0); { 以上、四角鏡の鏡 }
  end;
  Write('What is data_FileName ? ');
  Readln(FileName);
  ClrScr;
  Assign(INPUT,FileName);
  Reset(INPUT);
  For J:=1 to p do
  begin
    Read(INPUT,X,Y);
    GX3:=Round(X*Dist); X5:=0.1*X/0.1;Y5:=0.1*Y/0.1;
    PutPixel(X0+GX3,Y0-Y,Green); PutPixel(X0-GX3,Y0-Y,Yellow);
    ALPH:=PI/4;
    X1:=X5*COS(ALPH)-Y5*SIN(ALPH); { 虚像の回転 }
    Y1:=X5*SIN(ALPH)+Y5*COS(ALPH);
    X2:=(E*X1*(A*A+H*H)-2*A*H*(A*X1+E*H))/(E*(A*A-H*H)-2*X1*A*H); { 原像 }
    Y2:=(Y1*(E*(A*A+H*H)-2*A*H*(A-X2)))/(E*(A*A+H*H)); { 原像 }
    X3:=X2*COS(-ALPH)-Y2*SIN(-ALPH); { 原像の回転 }
    Y3:=X2*SIN(-ALPH)+Y2*COS(-ALPH); Y4:=ROUND(Y3); GX4:=Round(X3*Dist);
    PutPixel(X0+GX4,Y0-Y4,Red); PutPixel(X0-GX4,Y0-Y4,LightBlue);
  end;
  Close(INPUT);
  OutTextXY(420,350,'PRESS<RETURN>to quit:');
  Readln;
  CloseGraph;
End.

```

Fig. 24 文字アナモルフォーズのプログラム例

```

Program MOZI_DATA (Input,Output,Pyramid_Mirror);
uses CRT;
var
  Data :text;
  TextBuffer:string[128];
  FileName :string[12];
  i,x,y : integer;
begin
  ClrScr;
  Write('DATA FILEの名前は: ');
  Readln(FileName);
  Assign(Data,FileName);
  Reset(Data);
  While Not Eof(Data) do
  begin
    While Not Eofin(Data) do
    begin
      Readln(Data,TextBuffer);
      Write(TextBuffer);
    end;
    Readln(Data);
    Writeln;
  end;
  Write('Press Return ...');
  Readln;
  Close(Data);
End.

```

Fig. 23 DATAFILE の読込プログラム例

```

Program EXAMPLE_1 : {ピラミッド 4鏡 アナモルホーズ: 虚像,四角鏡 }
uses
  Graph;
const
  X0=220,Y0=200,L=25,A=100,H=170 : E=50,M=65;AY=70;BY=50;
  Green =2;Red=4;V=50; Dist=0.9; { X軸の縮率 }
var
  GraphDriver,GraphMode,ErrorCode :integer;
  N,X1,Y1,GX1 :integer;
  T,X,Y,ALPH :real;
Procedure object_revolution(X,Y:real);
var
  X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,ALPH:real;
  GX3,GX4,Y4 :integer;
begin
  ALPH:=PI/4;
  X1:=X*COS(ALPH)-Y*SIN(ALPH);
  Y1:=Y*SIN(ALPH)+X*COS(ALPH); GX3:=Round(X1*Dist); { 虚像の回転 }
  X2:=(E*X1*(A*A+H*H)-2*A*H*(A*X1+E*H))/(E*(A*A-H*H)-2*X1*A*H); { 原像 }
  Y2:=(Y1*(E*(A*A+H*H)-2*A*H*(A-X2)))/(E*(A*A+H*H)); { 原像 }
  X3:=X2*COS(-ALPH)-Y2*SIN(-ALPH);
  Y3:=X2*SIN(-ALPH)+Y2*COS(-ALPH); Y4:=ROUND(Y3); GX4:=Round(X3*Dist);
  PutPixel(X0+GX4,Y0-Y4,Green);
end { of object_revolution };
Procedure xy_zahyou_mirror(N,L:integer);
var
  S1,L1:real;S,N1,GX1,GX2:integer;
begin
  For N:=8 to 14 do
  begin
    L1:=L*Dist; GX1:=Round(N*L1);
    Line(X0+GX1,Y0-2,X0+GX1,Y0+2); { X軸の目盛り }
  end;
  For N1:=8 to 6 do
  begin
    Line(X0-2,Y0-N1*L,X0+2,Y0-N1*L); { Y軸の目盛り }
    Line(X0,1,X0,395);Line(1,Y0,620,Y0); { X軸,Y軸 }
    S1:=Sqrt(A*A+A*A); S:=Round(S1); GX2:=Round(S1*Dist);
    Line(X0+GX2,Y0,X0,Y0-S);Line(X0,Y0-S,X0-GX2,Y0);Line(X0-GX2,Y0,X0,Y0+S);
    Line(X0,Y0+S,X0+GX2,Y0); { 以上、四角鏡の鏡 }
  end { of xy_zahyou_mirror };
begin
  GraphDriver :=Detect;
  InitGraph(GraphDriver,GraphMode,'A:YDRIVERS');
  ErrorCode:=GraphResult;
  if ErrorCode<>Grok then
  begin
    Writeln('Graphics error:',GraphErrorMsg(ErrorCode));
    Writeln('Program aborted...');
    Halt(1);
  end;
  { MAIN PROGRAM START }
begin
  xy_zahyou_mirror(N,L); { PROCEDURE }
end;
  For X1:=20 to V do
  begin
    Y:=AY+O*X1; GX1:=Round(X1*Dist);X:=0.1*X1/0.1;Y1:=Round(Y);
    PutPixel(X0+GX1,Y0-Y1,Red);
    object_revolution(X,Y); { PROCEDURE }
  end;
  For X1:=20 to V do
  begin
    Y:=BY+O*X1; GX1:=Round(X1*Dist);X:=0.1*X1/0.1; Y1:=Round(Y);
    PutPixel(X0+GX1,Y0-Y1,Red);
    object_revolution(X,Y); { PROCEDURE }
  end;
  For Y1:=50 to 70 do
  begin
    X:=50+O*Y1;GX1:=Round(X*Dist);Y:=0.1*Y1/0.1;
    PutPixel(X0+GX1,Y0-Y1,Red);
    object_revolution(X,Y); { PROCEDURE }
  end;
  For Y1:=50 to 70 do
  begin
    X:=20+O*Y1;GX1:=Round(X*Dist);Y:=0.1*Y1/0.1;
    PutPixel(X0+GX1,Y0-Y1,Red);
    object_revolution(X,Y); { PROCEDURE }
  end;
  OutTextXY(420,380,'PRESS<RETURN>to quit:');
  Readln;
  CloseGraph;
End.

```

Fig. 25 ピラミッド鏡アナモルフォーズのプログラム例

【注】

- 1) 井村俊一：図学教育へのパーソナルコンピュータの利用について（4）

金沢美術工芸大学紀要第40号（1996年）

- 2) JURGIS BALTRUŠAITIS：
ANAMORPHOSES ou Thaumaturgus
opticus (FLAMMARION, Paris, 1984年)

【図版出典，その他】

- 3) 高山宏”アナモルフォーズ（光学魔術）”

p291で紹介、p292で図版151

《作品；1981年》が掲載されている。

1992年，国書刊行会：【注】2)の日本語訳

- 4) 井村俊一：図学教育へのパーソナルコンピュータの利用について（3）

金沢美術工芸大学紀要第39号（1995年）

（平成8年10月31日受理）