

図学教育へのパーソナルコンピュータの利用について(4)

— 円錐鏡アナモルフォーズの理論解析 —

井村俊一

1. はじめに

前報¹⁾で、反射光学的アナモルフォーズのうちの円筒鏡アナモルフォーズについてその理論的厳密解析について報告した。続く反射光学的アナモルフォーズである円錐鏡アナモルフォーズについて、バルトルシャイティスは彼の著書²⁾「アナモルフォーズ(光学魔術)」のなかで、I・L・ヴォールザールの作図法を紹介して、その方法で解決済であると述べている。筆者は本報で、I・L・ヴォールザールの作図法を吟味して、教育的見地からその方法が円錐鏡アナモルフォーズの作成に妥当な方法かどうかを検討した。その理由はヴォールザールが考案した作図法が光の反射の法則(入射角=反射角)を作図することに重点がおかれていて、平面上に描かれた《図ないし絵》(原像)が円錐鏡により、どのように映るか(虚像)を作図法の主体としていなかったからである。また、彼の作図法では試行錯誤してみる以外、円錐鏡の形体(円錐の高さ、母線の傾角、底円の大きさ等)の妥当性を検討することが不可能であるからである。続いて、幾何光学の鏡像の理論を適用して、円錐底円と同一平面上の「絵や図」(原像)と円錐鏡による「像」(虚像)との関係を円錐の頂点を通る垂直軸上に視点を設定して、解析し、その理論式(原像 \leftrightarrow 虚像の変換式)を導いた。そして、その結果を特に、教育用に応用が期待されるコンピュータプログラムに展開し、パーソナルコンピュータを使って、種々の条件下の原像 \leftrightarrow 虚像の関係を作図した。また、その作図の妥当性を検証するために、コンピュータ作図で設定した条件と形体的に同様な円錐鏡をステンレスの薄板を使って製作し、視点の位置を定めて、実験した。そこで、良好な結果が得られたので、報告する。

2. I・L・ヴォールザールによる円錐鏡アナモルフォーズの作図法の検討

ヴォールザールの円錐アナモルフォーズの作図法についてのバルトルシャイティスの説明は彼の専門から推測すればやむえないことであるが、大変文学的で科学的でない。そこで、彼の著書で紹介されている作図法のみを図版(Fig. 1)から数学的に検証する。ただ、この作図方法は著書のなかで《古典的規範と仰がれ、修正の手も加えられぬままそっくり継承されていく。⁴⁾》と、記述されていて、少し後のJ・F・ニスロンにも受け継がれ、彼の描いた図版(Fig. 2, Fig. 3)も同じ著書のなかで紹介されているので併せて検討する。

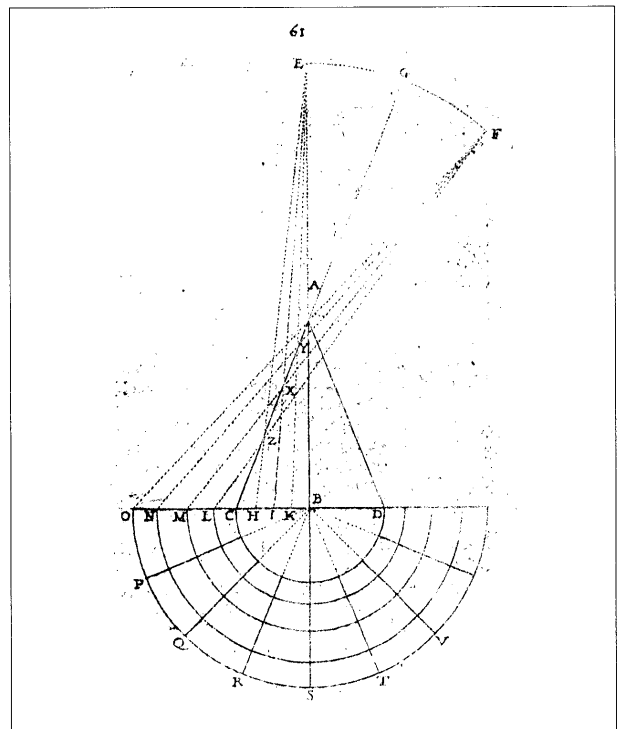


Fig. 1 I・L・ヴォールザール、円錐アナモルフォーズの幾何学、1630年³⁾

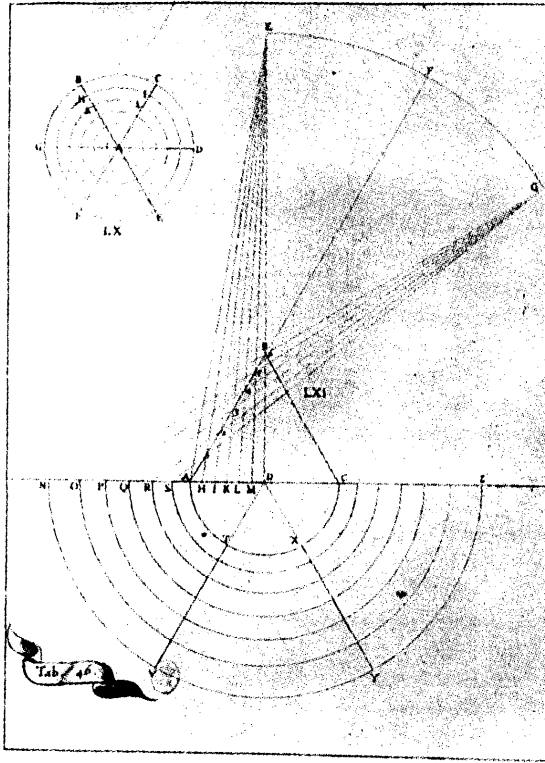


Fig.2 J=F・ニスロン, 円錐アナモルフォーズの幾何学, 1638年⁵⁾

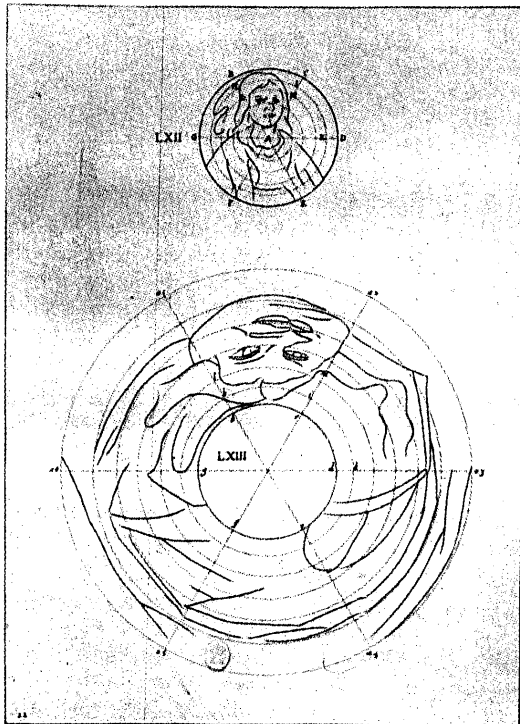


Fig.3 J=F・ニスロン, 円錐アナモルフォーズの幾何学, 1638年⁶⁾

ヴォールザールの作図法は円錐頂点を通る垂直軸上に視点を設定し、視点の円錐の母線（鏡）による虚像（母線に対して対称の位置）を求め、その虚像点に平面上に描かれた《絵や図形》（原像）からの光線（入射光線）を集中させるのを基本とする。実際は、その入射光線は円錐鏡（母線部）によって、反射して視点に向かう。

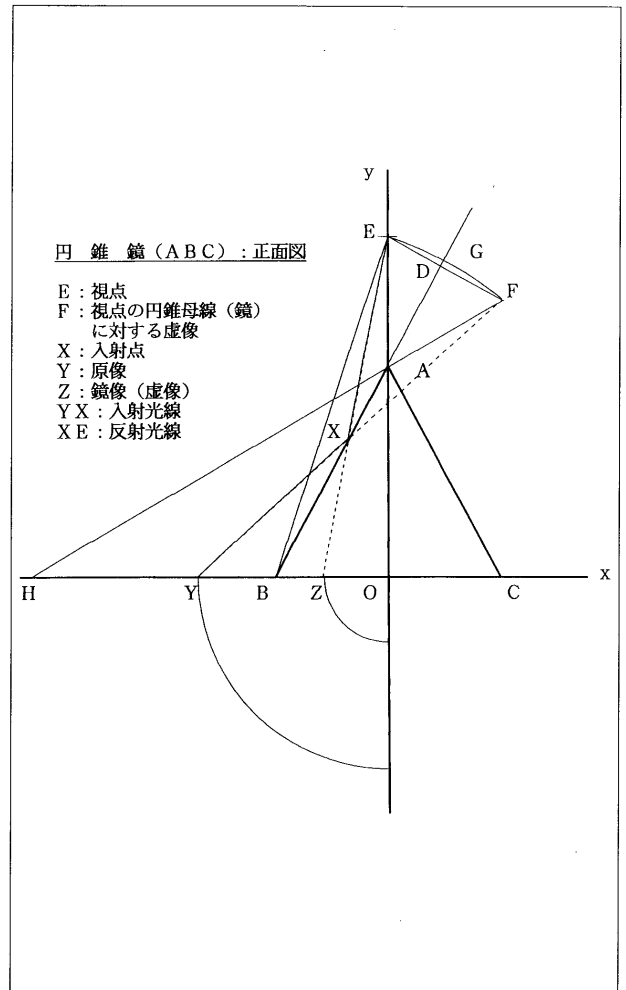


Fig.4 I・L・ヴォールザールの作図法の解析図

ヴォールザールの図版に忠実な Fig. 4 を参照して、彼の作図法を幾何学的に分析する。円錐正面図を ABC として、円錐垂直軸 (OA) の延長線上に視点 (E) をとる。点 E の母線 AB の延長線を対称軸とした点 F (視点 E の虚像) とすると、

$$DE = DF, \quad BD \perp EF$$

$\triangle AEF$ は二等辺三角形である。

図版では点Bを中心として半径BEの円弧を描き、母線ABを円弧の中心軸として、弧EG=弧GFとなるように円弧状にF、G点を作図している。円錐の母線(鏡)AB上に点Xを任意にとる。直線AFの延長線と直線BCの延長線との交点をHとして(鏡ABによる虚像が成立する為には原像は正面図で直線BH内でなければならない。)直線FXの延長線と直線OHの交点をYとする。次に反射光線EXの延長線と直線OBの交点をZとすると、原像Yの虚像がZとなる。直線EFと直線BDの設定から△XEFは常に二等辺三角形になるから、

$$\angle BXY = \angle DXF \quad (\text{対頂角})$$

$$DX \perp EF \text{ から、} \angle DXF = \angle DXE$$

$$\therefore \angle BXY = \angle DXE$$

故に、入射角=反射角となるから反射の法則を満足している。Fig. 3に示されるJ=F・ニスロンの図版には女性の絵の原像と円錐鏡による虚像が描かれている。また、原像Yを円錐底円の中心Oの同心円で設定すると、円錐鏡の視軸に対する対称性から、虚像Zは底円の中心Oの同心円となる。同様に原像Yを底円の中心Oからの放射状の線(円錐底円の外部の部分)に設定すれば、虚像Zは同じ放射状の線の円錐底円内部の部分になる。以上の関係が円錐鏡アナモルフォーズの作成の基本となっている。以上の検討から、ヴォールザールの作図法は理論的にも妥当なものである。

3. 円錐鏡アナモルフォーズの理論解析

ヴォールザールの方法は作図法としては妥当であるが、筆者が意図しているのはコンピュータの利用である。そのため、原像と虚像の関係の解析的取扱が不可避である。Fig. 5のように解析図を設定すると、円錐正面図の母線(鏡)の方程式は、

$$y = -\frac{H}{A}x + H$$

となり、x座標軸(x ≥ Aの部分)の母線(鏡)による虚像線の方程式は、

$$y = \frac{2AH}{H^2 - A^2}x - \frac{2A^2H}{H^2 - A^2}$$

となる。x座標軸(x ≥ Aの部分)上に原像X₀をとると、原像X₀の座標は(X₀, 0)である。その虚像は虚像線上に位置し、母線(鏡)の延長線に対してX₀の対称の位置となる。原像X₀とその虚像Mを結ぶ直線の方程式はX₀M ⊥ AHで、

$$y = \frac{A}{H}x - \frac{A}{H}X_0 \quad \text{である。}$$

M点の座標(M_x, M_y)とすると、

$$M_x = \frac{X_0(H^2 - A^2) - 2AH^2}{H^2 - A^2 - 2H^2}$$

$$M_y = \frac{2AH(X_0 - A)}{H^2 - A^2 - 2H^2}$$

視点の座標を(0, E)として、視点から虚像M点を見る。実際は、視線とx軸との交点に虚像を観察する。即ち、円錐鏡アナモルフォーズの虚像の位置である。この位置をX_iとして座標X_i(X_i, 0)を求める。そのため視線の方程式(直線EM)は、

$$y = \frac{2AH(X_0 - A) + E(H^2 + A^2)}{X_0(H^2 - A^2) - 2AH^2}x + E$$

である。

$$X_i = \frac{E\{X_0(A^2 - H^2) + 2AH^2\}}{2AH(X_0 - A) + E(H^2 + A^2)}$$

$$X_0 = \frac{2EAH^2 + X_i(2A^2H - EH^2 - EA^2)}{E(H^2 - A^2) + 2AHX_i}$$

Fig. 5の解析図を幾何学的に分析すると、原像X₀から出た任意の入射光線は円錐母線(鏡)HA上に入射し、Pで反射して視点Eへと進む。△AMX₀は設定より二等辺三角形である。同様にして、△PMX₀は常に二等辺三角形になる。∠NPX₀ = ∠NPM、∠NPM = ∠EPH
∴ ∠NPX₀ = ∠EPH
これより、反射の法則を満足しているので、本解析の妥当性が証明される。

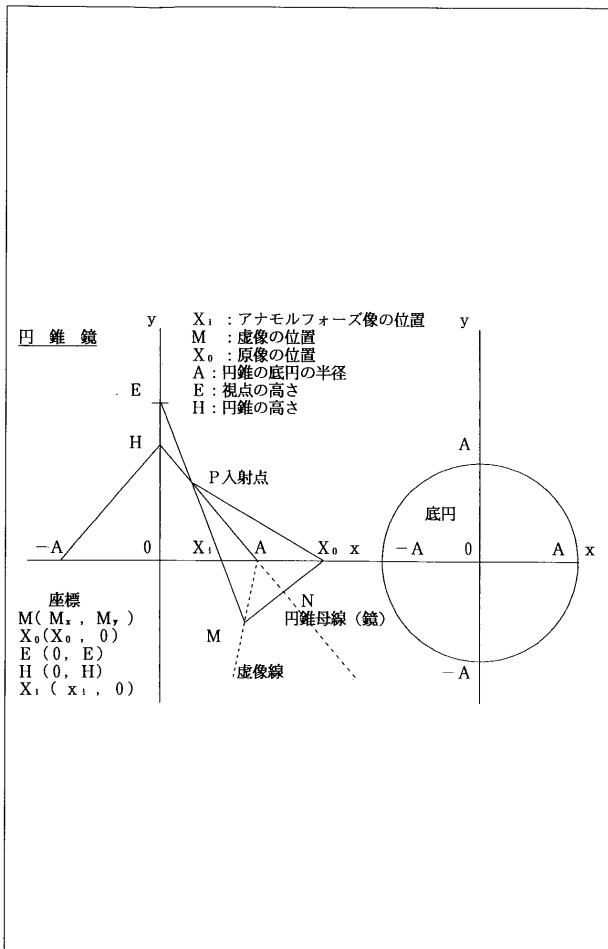


Fig. 5 円錐鏡アナモルフォーズ解析図

4. 円錐アナモルフォーズの原像と鏡像

(1) 鏡像が円のときの原像と鏡像

$m > 0$, $R_0 > 0$, A : 円錐底円半径

鏡像: $(x-m)^2 + y^2 = R_0^2$, $m + R_0 < A$

$x = R_0 \cos(t) + m$, $y = R_0 \sin(t)$

$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$$R_1 = \sqrt{R_0^2 + 2R_0 m \cos(t) + m^2}$$

ここで、 R_1 を変換式の X_1 に代入して、 X_0 を求める。続いて、 X_0 を R_2 と書き換えると、 $y = \tan(\alpha)x$ の直線上で R_1 が鏡像 R_2 に対応する原像である。(Fig. 6 参照。)

(2) 原像が円のときの原像と鏡像

原像: $(x-m)^2 + y^2 = R_0^2$, $m - R_0 > A$

$$x = R_0 \cos(t) + m, \quad y = R_0 \sin(t)$$

$$\alpha = \arctan(y/x)$$

$$R_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad R_2: \text{原像の位置}$$

R_2 を鏡像 X_i を求める変換式の X_0 に代入して、 X_i を求め、それを R_1 と書き換えると、直線 $y = \tan(\alpha)x$ 上で、 R_2 が原像、 R_1 が鏡像である。(Fig. 7 参照。)

(3) 原像が点Oを中心とした円弧のときの鏡像

$R > A$ として、 $x^2 + y^2 = R^2$ (原像)

円錐底円は $x^2 + y^2 = A^2$

X_i を求める変換式の X_0 に R を代入して求めた X_i を r と書き換えると、 $r < A$ で

$$r = \frac{E \{ R(A^2 - H^2) + 2AH^2 \}}{2AH(R - A) + E(H^2 + A^2)}$$

R (原像) に対応する鏡像の点は r で共に直線 $y = \tan(\alpha)x$ 上にある。即ち、原像、鏡像とも中心Oの同心円となる。

(Fig. 8 参照。)

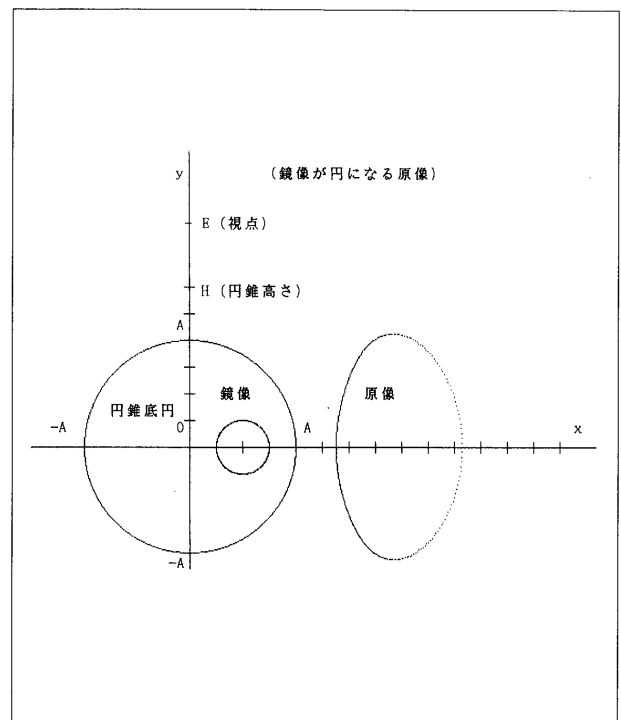


Fig. 6 鏡像が円のときの原像と鏡像

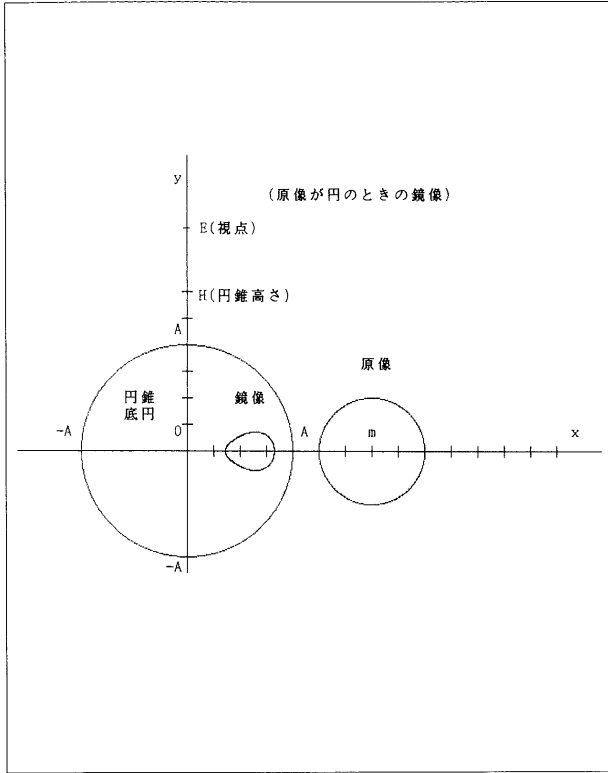


Fig.7 原像が円のときの原像と鏡像

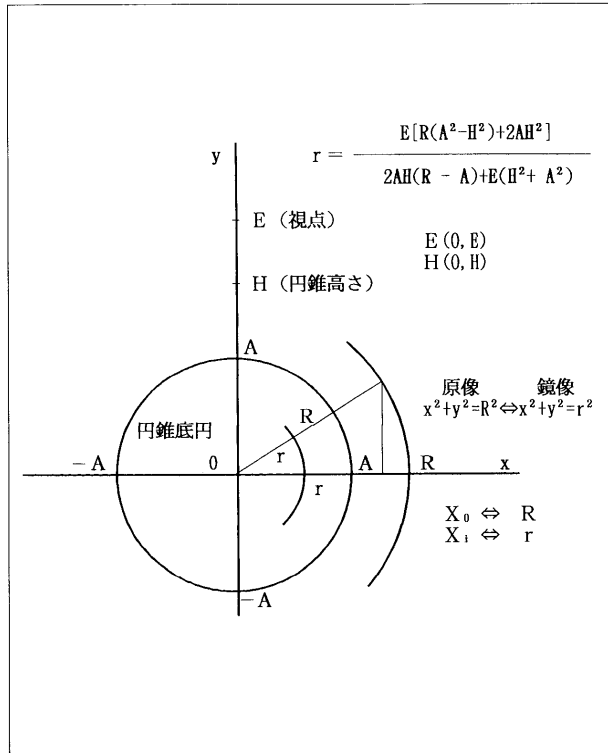


Fig.8 原像↔鏡像：中心0の円

(4) 鏡像が三角形のときの原像と鏡像
 三角形をPSTとして三辺の方程式は
 $p > 0, q > 0, t > 0$ また、

$$A > t > p, A^2 > t^2 + \left(\frac{qt}{p} - q\right)^2 \text{として、}$$

$$\text{直線PS : } y = -(q/p)x + q$$

$$\text{直線PT : } y = (q/p)x - q$$

$$\text{直線ST : } x = t$$

$$\text{各頂点 } P(p, 0), S\left(t, \frac{-qt}{p} + q\right), T\left(t, \frac{qt}{p} - q\right) \text{となる。}$$

① $p \leq x \leq t$

$$\text{直線PS : } y = -(q/p)x + q$$

$$\alpha = \arctan(Y/X)$$

$$L^2 = x^2 + y^2, \text{ で求めたLを}$$

原像 X_0 を求める変換式の X_i に代入して X_0 を求める。直線 $y = \tan(\alpha)x$ 上で、鏡像Lに対して、原像は X_0 である。

② $p \leq x \leq t$

$$\text{直線PT : } y = \left(\frac{q}{p}\right)x - q$$

$$\alpha = \arctan(Y/X)$$

$$L^2 = x^2 + y^2, \text{ で求めたLを}$$

原像 X_0 を求める変換式の X_i に代入して X_0 を求める。直線 $y = \tan(\alpha)x$ 上で、鏡像Lに対して、原像は X_0 である。

③ $\frac{-qt}{p} + q \leq y \leq \frac{qt}{p} - q$

$$\text{直線ST : } x = t$$

$$L^2 = t^2 + y^2, \alpha = \arctan(Y/t)$$

原像 X_0 を求める変換式の X_i に代入して X_0 を求める。直線 $y = \tan(\alpha)x$ 上で、鏡像Lに対して、原像は X_0 である。(Fig. 9参照。)

(5) 原像が三角形のときの原像と鏡像

$$p > A, t > p \text{ として、}$$

三角形をPSTとして三辺の方程式は

$$\text{直線PS : } y = -(q/p)x + q$$

$$\text{直線PT : } y = (q/p)x - q$$

$$\text{直線ST : } x = t$$

とすると、(4)の場合と同様なりあつかいとなる。(Fig. 10参照。)

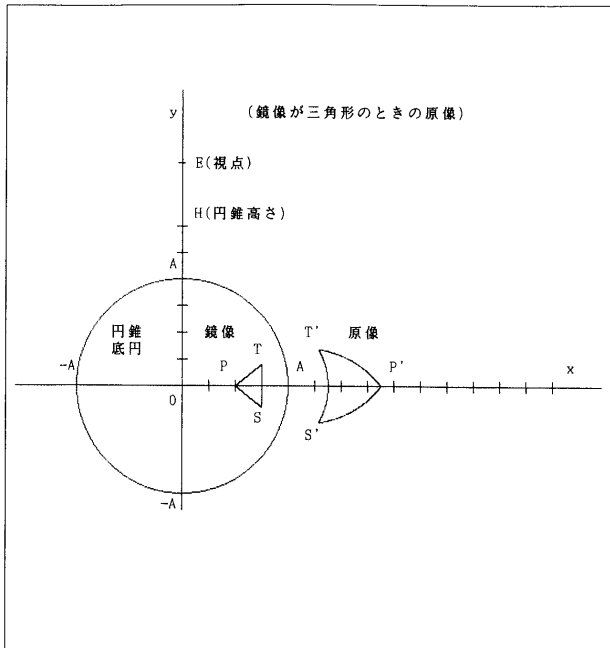


Fig.9 鏡像が三角形のときの原像と鏡像

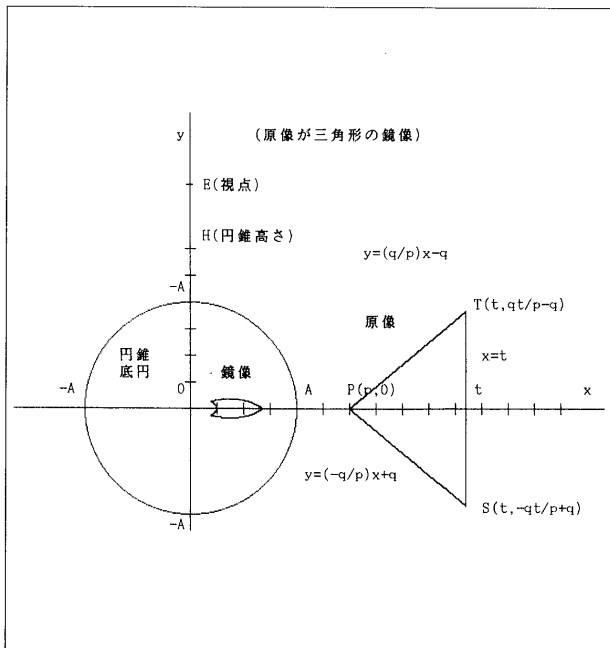


Fig.10 原像が三角形のときの原像と鏡像

(6) 鏡像が矩形のときの原像と鏡像

$q > 0, s > 0, t > 0, s > t$ として、 $A^2 > s^2 + q^2$ である。

矩形を $QSVW$ として、その四辺の方程式を
辺 $QS : y = q$, 辺 $SW : x = s$

辺 $WV : y = -q$, 辺 $VQ : x = t$ とする。
各頂点 $S(s, q), W(s, -q), V(t, -q), Q(t, q)$

① 辺 $SW : x = s \quad (-q \leq y \leq q)$

$L^2 = s^2 + y^2, \quad \alpha = \arctan(y/s)$

② $WV : y = -q \quad (t \leq x \leq s)$

$L^2 = q^2 + x^2, \quad \alpha = \arctan(-q/x)$

③ 辺 $VQ : x = t \quad (-q \leq y \leq q)$

$L^2 = t^2 + y^2, \quad \alpha = \arctan(y/t)$

④ 辺 $QS : y = q \quad (t \leq x \leq s)$

$L^2 = x^2 + q^2, \quad \alpha = \arctan(q/x)$

以上で求めた L を原像 X_0 を求める変換式の X_i に代入して X_0 を求める。

直線 $y = \tan(\alpha)x$ 上で、鏡像 L に対して原像は X_0 である。(Fig. 11 参照。)

(7) 原像が矩形のときの原像と鏡像

$s > t > A$ として (Fig. 12 参照。)

矩形を $QSVW$ として、その四辺の方程式を

辺 $QS : y = q$, 辺 $SW : x = s$

辺 $WV : y = -q$, 辺 $VQ : x = t$ として、

$S(s, q), W(s, -q), V(t, -q), Q(t, q)$ が各頂点となり、(6)の場合と同様な取扱となる。

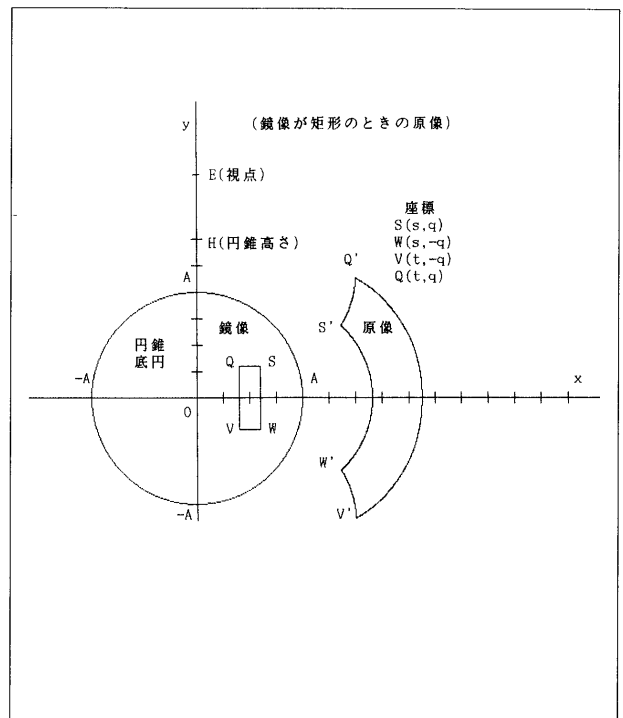


Fig.11 鏡像が矩形のときの原像と鏡像

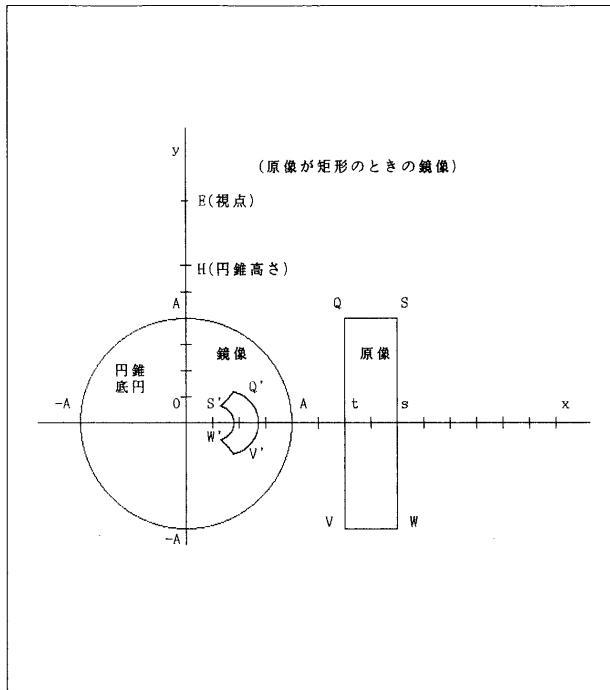


Fig.12 原像が矩形のときの原像と鏡像

```

10 REM (CONE ANAMORPHOSES)
20 CLS 3
30 CONSOLE 0, 25, 0, 1
40 SCREEN 3, 0
50 円錐アナモルフォーズ 鏡像 円
60 WIDTH 80, 25
70 X0=320 : Y0=200:PAI=3.14159
80 LINE(345, 275)-(345, 285), 4 : LINE(370, 275)-(370, 285), 4
90 LINE(395, 275)-(395, 285), 4 : LINE(420, 275)-(420, 285), 4
100 LINE(445, 275)-(445, 285), 4 : LINE(470, 275)-(470, 285), 4
110 LINE(495, 275)-(495, 285), 4 : LINE(520, 275)-(520, 285), 4
120 LINE(545, 275)-(545, 285), 4 : LINE(570, 275)-(570, 285), 4
130 A=100 : H=150 : E=250 : M=50 : RO=25
140 CL=5 : CIRCLE(X0-100, Y0+80), A, CL
150 LINE(215, 205)-(225, 205), 4 : LINE(215, 180)-(225, 180), 4
160 LINE(215, 155)-(225, 155), 4 : LINE(215, 130)-(225, 130), 4
170 LINE(X0-100, 1)-(X0-100, 395), 4 : LINE(1, Y0+80)-(620, Y0+80), 4
180 LINE(245, 275)-(245, 285), 4 : LINE(270, 275)-(270, 285), 4
190 LINE(295, 275)-(295, 285), 4 : LINE(320, 275)-(320, 285), 4
200 LINE(215, 255)-(225, 255), 4 : LINE(215, 230)-(225, 230), 4
210 FOR T=0 TO 2*PAI STEP 2*PAI/360
220 R1=SQR(M*M+2*M*RO*COS(T))+RO*RO
230 ALFA=ATN(RO*SIN(T)/(M+RO*COS(T)))
240 R2=(2*E*A*H*H+R1*(2*A*A*H-E*H*H-E*A*A))/(E*(H*H-A*A)+2*A*H*R1)
250 X=R2*COS(ALFA) : Y=R2*SIN(ALFA)
260 X1=M+RO*COS(T) : Y1=RO*SIN(T) : PSET(X1+X0-100, Y0+80 -Y1), CL
270 PSET(X+X0-100, Y0+Y+80), CL
280 NEXT T
290 FOR T=0 TO 2*PAI STEP PAI/2
300 R1=SQR(M*M+2*M*RO*COS(T))+RO*RO
310 PRINT "T=";T, "R1=";R1
320 PRINT
330 ALFA=ATN(RO*SIN(T)/(M+RO*COS(T)))
340 R2=(2*E*A*H*H+R1*(2*A*A*H-E*H*H-E*A*A))/(E*(H*H-A*A)+2*A*H*R1)
350 PRINT "R2=";R2
360 PRINT
370 NEXT T
380 END

```

Fig.13 鏡像が円の場合のプログラム

5. コンピュータのプログラム例

鏡像が円であるプログラムを Fig. 13 に示し、鏡像が三角形であるプログラムを Fig. 14 に示す。いずれも、対応する原像と鏡像が CRT 上に対応しながら描かれ、鏡像変換の関係が容易に理解できるプログラムである。また、本プログラムを少し修整すれば、ハンス・ハムングレン⁷⁾が、試みたピラミッド鏡アナモルフォーズにも適用可能である。なぜなら、円錐鏡における原像と鏡像の関係はピラミッド鏡においても基本的には同様だからである。即ち、円錐における母線(鏡)は中心軸の回りに 360° 回転しているが、ピラミッド鏡では原像が傾斜した平面鏡に映るので、原像と鏡像の関係は円錐鏡における x 軸上での X_0 と X_1 の関係と同様で、ただ円錐鏡の場合の様に X_1 や X_0 を中心 O の回りに同じ角度だけ回転させることをせずに、y 軸に平行に移せばよい。このことは、ピラミッド鏡の平面図を x-y 平面で表示し、考察した結果である。

ピラミッド鏡アナモルフォーズについて、具体的なプログラムや作図例は稿を改めて報告する予定である。(Fig. 13, Fig. 14 参照。)

```

10 REM (CONE ANAMORPHOSES)
20 CLS 3
30 CONSOLE 0, 25, 0, 1
40 SCREEN 3, 0
50 円錐アナモルフォーズ 鏡像 三角形
60 WIDTH 80, 25
70 X0=320 : Y0=200
80 LINE(345, 275)-(345, 285), 4 : LINE(370, 275)-(370, 285), 4
90 LINE(395, 275)-(395, 285), 4 : LINE(420, 275)-(420, 285), 4
100 LINE(445, 275)-(445, 285), 4 : LINE(470, 275)-(470, 285), 4
110 LINE(495, 275)-(495, 285), 4 : LINE(520, 275)-(520, 285), 4
120 LINE(545, 275)-(545, 285), 4 : LINE(570, 275)-(570, 285), 4
130 A=100 : H=150 : E=250
140 CL=5 : CIRCLE(X0-100, Y0+80), A, CL
150 LINE(215, 205)-(225, 205), 4 : LINE(215, 180)-(225, 180), 4
160 LINE(215, 155)-(225, 155), 4 : LINE(215, 130)-(225, 130), 4
170 LINE(X0-100, 1)-(X0-100, 395), 4 : LINE(1, Y0+80)-(620, Y0+80), 4
180 LINE(245, 275)-(245, 285), 4 : LINE(270, 275)-(270, 285), 4
190 LINE(295, 275)-(295, 285), 4 : LINE(320, 275)-(320, 285), 4
200 LINE(215, 255)-(225, 255), 4 : LINE(215, 230)-(225, 230), 4
210 P=50 : Q=40 : T=75
220 FOR X=P TO T STEP .1
230 Y=Q/P*X-Q : ALFA=ATN(Y/X) : L=SQR(X*X+Y*Y)
240 X3=(2*E*A*H*H+L*(2*A*A*H-E*H*H-E*A*A))/(E*(H*H-A*A)+2*A*H*L)
250 X4=X3*COS(ALFA) : Y4=X3*SIN(ALFA)
260 PSET(X+X0-100, Y0+80-Y), CL : PSET(X4+X0-100, Y0+80-Y4), CL
270 NEXT X
280 FOR Y=Q/P TO T STEP .1
290 X=-Q/P*Y+Q : ALFA=ATN(Y/X) : L=SQR(X*X+Y*Y)
300 X3=(2*E*A*H*H+L*(2*A*A*H-E*H*H-E*A*A))/(E*(H*H-A*A)+2*A*H*L)
310 X4=X3*COS(ALFA) : Y4=X3*SIN(ALFA)
320 PSET(X+X0-100, Y0+80-Y), CL : PSET(X4+X0-100, Y0+80-Y4), CL
330 NEXT Y
340 FOR Y=-Q/P*Y+Q TO Q/P*Y-Q STEP .1
350 L=SQR(T*Y*Y) : ALFA=ATN(Y/T)
360 X3=(2*E*A*H*H+L*(2*A*A*H-E*H*H-E*A*A))/(E*(H*H-A*A)+2*A*H*L)
370 X4=X3*COS(ALFA) : Y4=X3*SIN(ALFA)
380 PSET(X+X0-100, Y0+80-Y), CL : PSET(X4+X0-100, Y0+80-Y4), CL
390 NEXT Y
410 END

```

Fig.14 鏡像が三角形の場合のプログラム

6. 円錐アナモルフォーズの実験

本報の作図例の妥当性を検証するために、本報で設定した条件の円錐鏡をステンレスの薄板で製作した。それをコンピュータで作図した原像の円錐鏡の位置に置き、設定した視点から円錐鏡をのぞきこみ鏡に映る鏡像が円錐鏡の下に隠れているコンピュータで作図した鏡像と合致することを確認した。

(Fig. 15, Fig. 16 参照。)

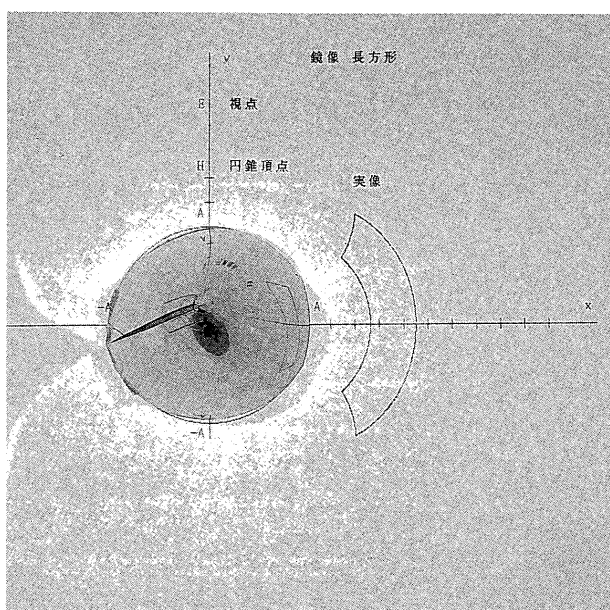


Fig.15 円錐アナモルフォーズの実験 I

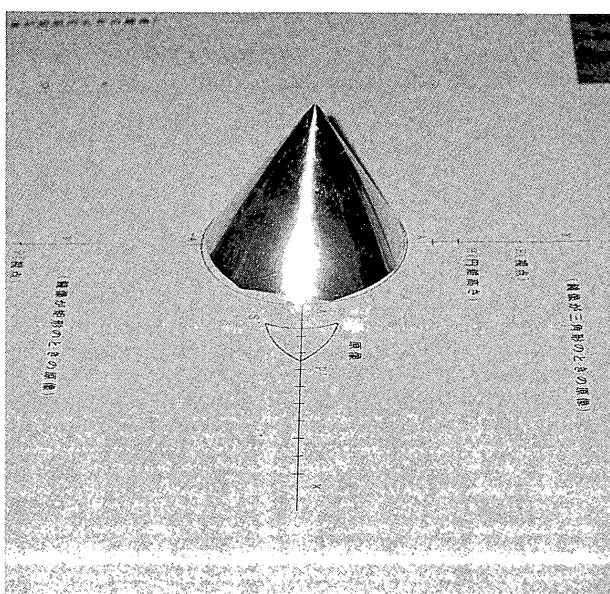


Fig.16 円錐アナモルフォーズの実験 II

7. 結論

- (1) 円錐鏡によるアナモルフォーズを理論解析して鏡像と原像の関係の方程式を導いた。

その結果をコンピュータプログラムにまとめて基本図形の作図を行った。本報告には代表的な作図例を掲載した。また、ピラミッド鏡アナモルフォーズにも一部、言及した。

- (2) 原像と鏡像（虚像）の基本変換式は、

$$X_i = \frac{E \{ X_o (A^2 - H^2) + 2 A H^2 \}}{2 A H (X_o - A) + E (H^2 + A^2)}$$

$$X_o = \frac{2 E A H^2 + X_i (2 A^2 H - E H^2 - E A^2)}{E (H^2 - A^2) + 2 A H X_i}$$

- (3) (1)の結果を検証するため円錐鏡を製作して実験を行い、理論解析の妥当性を確認した。
- (4) コンピュータプログラムは条件を文字で設定しているので、多様な円錐アナモルフォーズをまもって確認でき、最適な円錐アナモルフォーズの条件を探ったり、手軽にアナモルフォーズを試みたい人達の有力な手段となるであろう。

【注】

- 1) 井村俊一：図学教育へのパーソナルコンピュータの利用について(3)

金沢美術工芸大学紀要第39号 (1995年)

- 2) JURGIS BALTRUŠAITIS : ANAMORPHOSES OU Thaumaturgus opticus (FLAMMARION, Paris, 1984年)

【図版出典, その他】

- 3) 【注】 2) と同じ。
- 4) 高山宏 “アナモルフォーズ (光学魔術)” p 226, 文中より引用。1992年, 国書刊行会: 【注】 2) の日本語訳
- 5) 【注】 2) と同じ。
- 6) 【注】 2) と同じ。
- 7) 【注】 4) 日本語訳: p 291で紹介、p 292で図版151《作品; 1981年》が掲載されている。

(平成7年10月20日受理)