

# 纖維と円筒形ガイドとの摩擦に関する考察(2)

——回転振動する纖維ガイドが糸の張力振動に  
およぼす効果について——

井 村 俊 一

Friction of yarn round a cylindrical textile guide (2nd)  
—Behavior of tensile vibration of the running yarn under  
a cylindrical textile guide vibrating round its center—

Toshikazu Imura

## ABSTRACT

It is a very important matter to control the friction between the running fibers and their guides of the textile machinery in the textile industries.

It is important especially in the case of the synthetic fibers e.g. nylon fiber, polyester fiber and so on.

As a method of controlling the friction, it is theoretically considered that the rolling high frequency vibration of small amplitude as compared with the natural frequency of the system is added to the textile guide.

Then, solid friction between nylon yarn and the textile guide changes the positive vibratory solid friction.

It is consequently obtained that the positive vibratory solid friction behaves as if it were the fluid friction containing the damping constant which expresses  $h = \frac{x_f}{4a\pi} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ ,

where,  $a \sin \omega t$ ; equation of the rolling vibration,

$x_f; \frac{f_1 + f_2}{k_1}$ ,  $k_1$ ; spring constant of the yarn,

$f_1, f_2$ ; alternate frictional force,  $\omega_0$ ; natural angular frequency of the system.

In this paper, moreover, it was confirmed by the experiment that the vibratory solid friction became equivalent to the fluid friction and so, unusual tensile vibration was diminished exponentially.

## 1. 緒 言

糸がその製造工程や、製織準備工程等で、走行しているときに、糸の走行環境における種々の外乱（たとえば、糸ガイドの摩擦状態、糸の巻取り、送り出しの状態、纖維機械の運転状態

など）により、常に張力振動が、励起させられている。この張力振動の状態が、糸の品質や、織物の品質に、大きな影響を、およぼしている。特に、合成纖維の糸や、加工糸にとって、この影響は顕著に、あらわれる。そのため、張力

のコントロールが、重要な課題となっている。そこで、張力コントロールのために、今日、装置として、種々のテンションコントローラーが開発され、かつ実用化されて、纖維機械での糸の走行道程中に、新たに、装備されている。ここで、筆者は、<sup>(1)</sup> 繊維ガイドに、回転振動を、付与して、糸の摩擦力低減に、成功したが、その結果を、ふまえて、さらに、本研究では、糸の走行道程中に、何らかの外乱によって、異常張力変動が、勃発したのを、纖維機械に不可欠な、糸ガイドそのものに、強制的に回転振動を、付与して、糸ガイドの振動摩擦によって、すみやかに、異常状態を、減衰消滅させる効果を、確認して、摩擦現象に対して、振動の利用が、有効であることを、提起するものである。そこで、試料糸に合成纖維の例として、ナイロン糸を探り、纖維ガイドとして、梨地クロムメッキの表面処理をほどこした、円筒形ガイドを使用して、実験をおこない、その結果と理論的に解析検討した結果が、定性的に、一致し、糸ガイドの不安定な、作用をおよぼす固体摩擦（ここでは、クーロン摩擦と考えてよい）が、糸ガイドの回転振動によって、望ましい流体摩擦（ここでは、速度に比例する減衰力をおよぼす摩擦）が、作用したのと同じ、減衰効果をもつことが、判明したので、ここに報告する。

## 2. 実験装置と方法

本実験は、恒温、恒湿室でもって、Fig. 1の装置を使用し、試料糸の一端に、重錘2個( $W_1 = 10\text{ g}$ ,  $W_2 = 5\text{ g}$ )を連ねて、取り付け、円筒形ガイドを経て、他端を角ネジの回転でもって、一定速度( $v = 1\text{ mm/sec}$ )で糸を、円筒形ガイド上を、走行させる形式である。はじめに、糸ガイド(G)に強制振動を付与せずに、外乱として、糸が走行中に、2個の重錘のうち、1個、すなわち $W_2(5\text{ g})$ を、静かに、慎重に、ハサミで、切断するかたちを取り、糸に異常張力変動を発生させ、それが糸ガイドの固体摩擦を経ることによって、どのように変化するかを、糸ガイドの両側で、A,Bの非接着型ストレインゲージ(Uゲージ)で、測定した。次に、Fig. 2の装置で、円筒形ガイドに、回転振動を、強制

的に付与し、上述のようにして、張力変動を、発生させ、それが、回転振動ガイドを経ることによって、どのように変化するかを測定した。本実験では、A,Bの非接着型ストレインゲージの張力波形を、直記式電磁オシログラフにて、記録した。なお、本実験に使用した、計器、および試料糸等の詳細は以下に示す。

### 2・1 使用計器

(1)ダンパー付非接着型ストレインゲージ(A)

T U-1型、定格±100 g、固有振動数500 Hz

(2)非接着型ストレインゲージ(B)

U T型、定格±100 g 固有振動数250 Hz

(3)直記式、電磁オシログラフ

E M 0-62型、使用振動子G-600B-F

(4)動歪測定器

D S 6 /M T Y型

(5)ムービングコイル式電磁励振器

T Y P E 513-A

(6)低周波発振器

C R 223A型

(7)低周波ミリボルト計

V T-303A型

(8)電力増幅器

360-A型

### 2・2 試料糸および、円筒形ガイド

(1)テグス04番(100デニール相当)

(2)ティジンナイロンモノフィラメント(20デニール) - 6ナイロン

(3)梨地クロムメッキ表面処理糸ガイドφ 5

Fig. 3 を参照

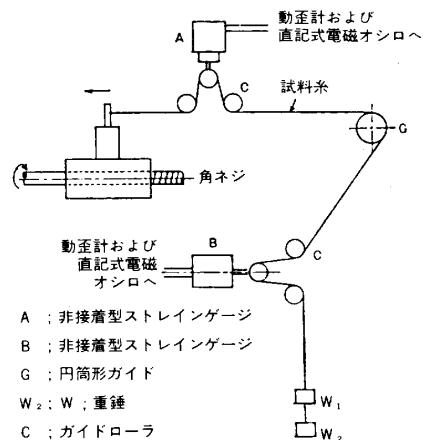


Fig. 1 実験装置

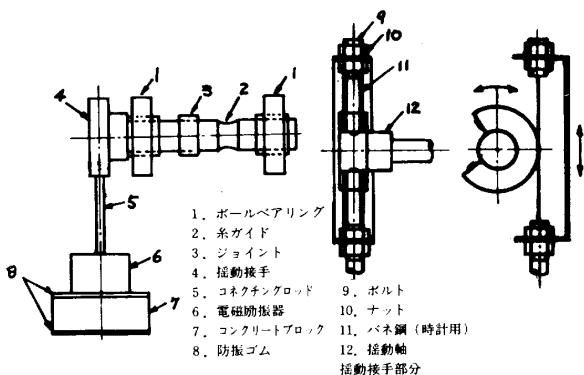


Fig. 2 回転振動駆動装置

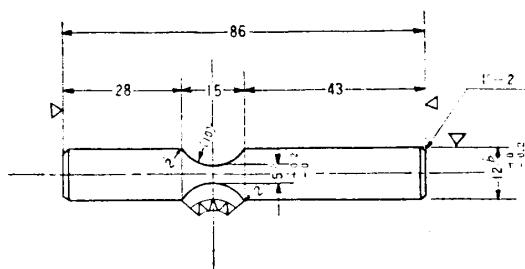


Fig. 3 梨地クロムメッキガイド

### 2・3 実験装置ブロック図

Fig. 4 に本実験の装置のブロック図を示す。

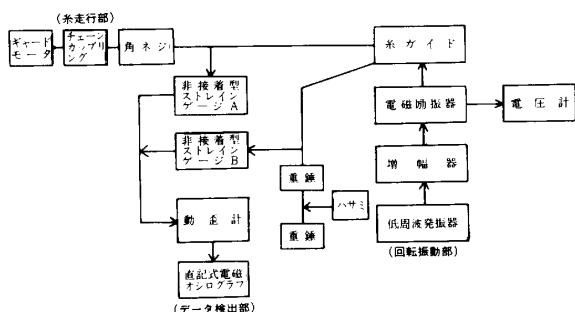


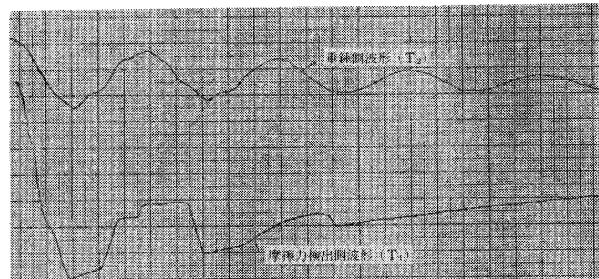
Fig. 4 実験装置ブロックダイヤグラム

### 3. 実験結果と検討

Fig. 5～Fig. 9 は Fig. 1 によって示される非接着型ストレインゲージ A, B により記録した、張力波形である。いずれも糸の走行速度は 1 mm/sec である。Fig. 5 は試料糸はテグス(04番)で、糸ガイドに回転振動を付与せずに、重錘 W<sub>2</sub>を切断したときの張力波形である。摩擦力検出スト

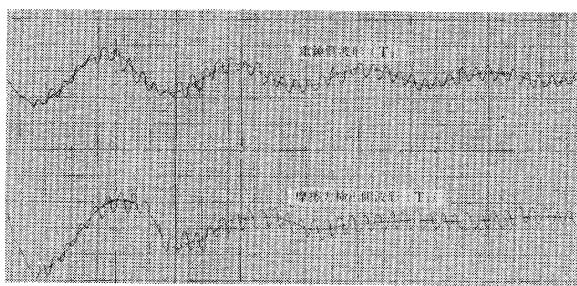
レインゲージ (A) による張力波形は糸ガイドの固体摩擦(クーロン摩擦)の影響により、ストップモーションを含む不規則な振動で減衰し、最後は直線的に平衡状態になっているのが観察される。このように、固体摩擦は、振動を減衰させるが、ストップモーションなどの在在で、糸が走行する過程で、ストップモーションそのものが、異常張力振動の原因になりうる。そして固体摩擦は糸ガイド表面の状態により不安定になり易い。Fig. 6 は Fig. 5 と同じ条件で、ただ、糸ガイドに、30Hz (ガイド表面振幅 0.36 mm) の回転振動を付与した場合の張力波形である。加振周波数が、波形上にあらわれているが、加振周波数波形の中心を、一点鎖線で、連ねて、観察すると、この張力波形は流体摩擦の特徴である粘性減衰を示し、振幅が、指数的に減衰していることを示している。

Fig. 7 は Fig. 5 と Fig. 6 を、重ね合わせて、示したもので、加振した場合と、しない場合の相違が明瞭に観察される。Fig. 8 は試料糸として、ナイロンモノofilament 20 デニールを取り、重錘 W<sub>2</sub>を切断して、張力変動を発生させたものである。摩擦力検出側の張力波形 (A) は、正弦波的な波形を示さず、最後は直線的に平衡状態に、なっているのが観察される。Fig. 9 は同一の条件で、糸ガイドに 70Hz (ガイド表面振幅 0.038 mm) の回転振動を付与したときの結果である。Fig. 8 とちがって、粘性減衰を伴なった、正弦波的な張力波形が明瞭に観察される。このことからも、固体摩擦 (クーロン摩擦) を、振動させて、振動固体摩擦にすると、流体摩擦化した、粘性減衰力に変わることが判明した。



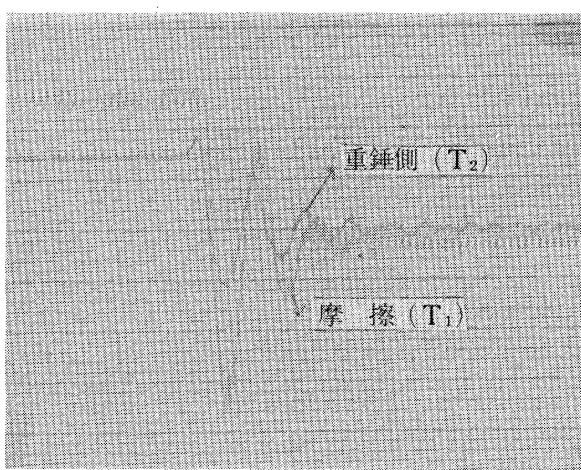
条件 試料糸 テグス04番、加振せず、  
 $v = 1 \text{ mm/sec}$  梨地 5 φ ガイド  $W = 15\text{g} \rightarrow W = 10\text{g}$

Fig. 5 張力波形



条件 試料糸 テグス04番  $f = 30\text{Hz}$ ,  $a = 0.36\text{mm}$   
 $v = 1\text{ mm/sec}$ , 梨地  $5\phi$  ガイド  $W = 15\text{g} \rightarrow W = 10\text{g}$

Fig.6 張 力 波 形



条件 試料糸 ナイロンモノフィラメント (20D)  
 $f = 70\text{Hz}$ ,  $a = 0.038\text{mm}$   $v = 1\text{ mm/sec}$ ,  
梨地  $5\phi$  ガイド  $W = 15\text{g} \rightarrow W = 10\text{g}$

Fig.9 張 力 波 形

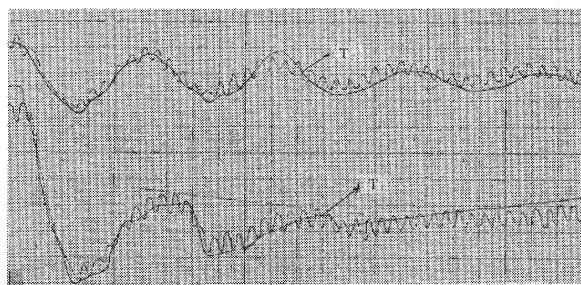
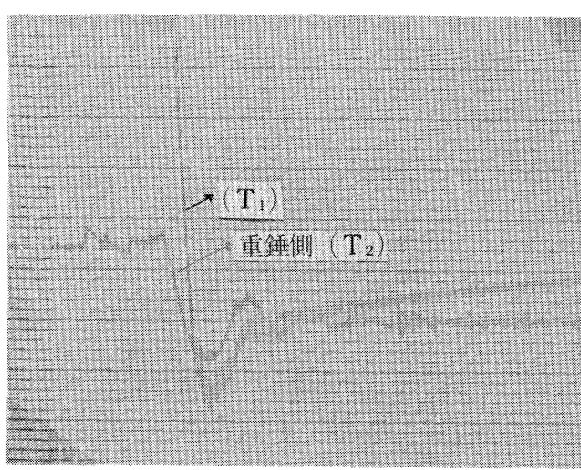


Fig.7 Fig.5とFig.6とを重ね合わせた張力波形



条件 試料糸 ナイロンモノフィラメント (20D)、加振せず  
 $v = 1\text{ mm/sec}$ , 梨地  $5\phi$  ガイド

Fig.8 張 力 波 形

#### 4. 理論解析

##### 4・1 等価モデル

本実験で得られた張力波形Fig.5~Fig.9の構造を検討するために、Fig.1に示される実験装置の等価モデルをFig.10に示す。ここで、Fig.1に示される装置の構造上、円筒形ガイドと糸はある接觸角（本実験では約130°）でもって接している。そのため摩擦現象は一定の接觸角を通じて、糸に摩擦力をおよぼすわけであるが、取り扱いを簡単にするために、等価モデルでは、円弧状になった糸の部分を、直線上の1点に摩擦力が集中して作用するものとする。そして摩擦力の大きさは、円弧形態のときに作用した摩擦力とする。また、回転振動を糸ガイドに付与したとき、摩擦力は、交番的に糸に作用する。

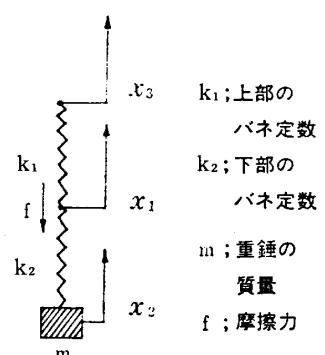


Fig.10 実験装置の等価モデル

## 4・2 理論式のための仮定

- (1)糸は粘性のない1自由度バネ質量系として、糸の質量は無視可能で、バネ定数のみを考慮するものとする。
- (2)回転振動による交番摩擦力はアモントン＝クーロン則に従うものとする。
- (3)糸ガイドが糸に対して、交番摩擦力を、作用する時、糸と糸ガイドの間で、瞬間に、相対停止する時期があるが、本実験の条件（加振周波数  $f = 30\text{Hz}, 70\text{Hz}$ ）では、アモントン＝クーロン則にかかわらず、停止による、静止摩擦力と動摩擦力の差異を考慮しなくてもよいものとする。（静止摩擦の時間依存性の研究で、この仮定が本実験の条件では妥当であることがわかるがこのことはいずれ別報で報告するものである。）
- (4)バネ定数  $k_1, k_2$  は本実験方式では糸の走行と共に変化するはずであるが、走行速度  $1\text{mm/sec}$  程度で、データ検出の糸距離が高々  $1\text{cm}$  ぐらいのため、 $k_1, k_2$  の変化を無視して、一定とみなして解析してもさしつかえがないものとする。

## 4・3 理 論 式

Fig.10の等価モデルのように座標を定め、座標基準点は重錘の平衡位置とする。

また以下の解析に使用する文字を次のように定める。

$k_1$  ; 上部のバネ定数。

$a$  ; ガイドの振幅。

$k_2$  ; 下部のバネ定数。

$\omega$  ; ガイドの角振動数。

$m$  ; 重錘の質量。

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (\text{合成バネ定数}) \quad f_1, f_2; \text{ 交番摩擦力} \quad v; \text{糸速。}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1(x_3 - x_1) + f_1 = k_2(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) \end{array} \right. \quad (4-1)$$

$$(4-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = vt \\ m\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) \end{array} \right. \quad (4-3)$$

$$x_1 = \frac{k_1 x_3 + k_2 x_2 - f_2}{k_1 + k_2} \quad (4-4)$$

式 (4-1)~(4-3) より

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_2 + kx_2 = kvt + \frac{k}{k_1}f_1 \\ m\ddot{x}_2 = kvt - \frac{k}{k_1}f_2 \end{array} \right. \quad (4-5)$$

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{x}_2 + kx_2 = kvt - \frac{k}{k_1}f_2 \\ \text{となる。} \end{array} \right. \quad (4-6)$$

ここで、糸ガイドが振幅  $a$ 、角振動数  $\omega$ 、つまり  $a \sin(\omega t)$  なる、振動をしているとき、(4-1) 式における摩擦力、 $f_1, f_2$  は糸とガイドの相対速度の正負によってきまる。つまり、

$$\dot{x}_1 - \frac{d}{dt}(a \sin(\omega t)) > 0 \text{ のとき、} + f_1$$

$$\dot{x}_1 - \frac{d}{dt}(a \sin(\omega t)) < 0 \text{ のとき、} - f_2 \text{ となる。}$$

ここで、摩擦力、 $+f_1, -f_2, +f_1, -f_2, \dots$ と、次々に変化する時刻を、 $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n \dots$ とすると

$$\begin{aligned} t_{2n} &\leq t \leq t_{2n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ のとき } +f_1 \\ t_{2n-1} &\leq t \leq t_{2n} \quad \text{のとき } -f_2 \text{ となる。} \end{aligned}$$

(1)  $0 \leq t \leq t_1$  のとき、(4-5) 式より、摩擦力  $+f_1$  が作用、 $m\ddot{x}_2 + kx_2 = kvt + \frac{k}{k_1}f_1$  の一般解は、 $C_1, C_2$ , を任意定数とすると、

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= vt + C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t) + \frac{f_1}{k_1} \\ \dot{x}_2 &= v + C_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t) - C_2 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

$$\text{但し、 } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

初期条件；  $t = 0, x_2 = x_0, \dot{x}_2 = 0$  とすると、(4-7) 式は

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= vt - \frac{v}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{k_1 x_0 - f_1}{k_1} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_1}{k_1} \\ \dot{x}_2 &= v - v \cos(\omega_0 t) - \frac{k_1 x_0 - f_1}{k_1} \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

(2)  $t_1 \leq t \leq t_2$  のとき (4-6) 式より摩擦力  $-f_2$  が作用、 $m\ddot{x}_2 + kx_2 = kvt - \frac{k}{k_1}f_2$  の一般解は  $C_3, C_4$ , を任意定数として、

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= vt + C_3 \sin(\omega_0 t) + C_4 \cos(\omega_0 t) - \frac{f_2}{k_1} \\ \dot{x}_2 &= v + C_3 \omega_0 \cos(\omega_0 t) - C_4 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

未定定数  $C_3, C_4$ , を定めるため、接続点、 $t = t_1$  において、(4-8) 式と (4-9) 式が成立するから、連立させて、求めると、

$$C_3 = -\frac{v}{\omega_0} + \frac{f_1 + f_2}{k_1} \sin(\omega_0 t_1)$$

$$C_4 = \frac{k_1 x_0 - f_1}{k_1} + \frac{f_1 + f_2}{k_1} \cos(\omega_0 t_1) \text{ となる。}$$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= vt + \left\{ -\frac{v}{\omega_0} + \frac{f_1 + f_2}{k_1} \sin(\omega_0 t_1) \right\} \sin(\omega_0 t) + \left\{ \frac{k_1 x_0 - f_1}{k_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_1 + f_2}{k_1} \cos(\omega_0 t_1) \right\} \cos(\omega_0 t) - \frac{f_2}{k_1} \\ \dot{x}_2 &= v + \left\{ -v + \frac{(f_1 + f_2)}{k_1} \omega_0 \sin(\omega_0 t_1) \right\} \cos(\omega_0 t) \\ &\quad - \omega_0 \left\{ \frac{k_1 x_0 - f_1}{k_1} + \frac{f_1 + f_2}{k_1} \cos(\omega_0 t_1) \right\} \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

(3)  $t_2 \leq t \leq t_3$  のとき、摩擦力  $+ f_1$  が作用、(4-5) 式より、

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= vt + C_5 \sin(\omega_0 t) + C_6 \cos(\omega_0 t) + \frac{f_1}{k_1} \\ \dot{x}_2 &= v + C_5 \omega_0 \cos(\omega_0 t) - C_6 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \quad (4-11)$$

未定定数  $C_5, C_6$  を求めるため、 $t = t_2$ において、(4-10) 式と (4-11) 式が成立するから、連立させて、解くと、

$$\begin{aligned} C_5 &= C_3 - \frac{f_1 + f_2}{k_1} \sin(\omega_0 t_2) \\ C_6 &= C_4 - \frac{f_1 + f_2}{k_1} \cos(\omega_0 t_2) \end{aligned}$$

となる。

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= vt + \left\{ C_3 - \frac{f_1 + f_2}{k_1} \sin(\omega_0 t_2) \right\} \sin(\omega_0 t) + \left\{ C_4 - \frac{f_1 + f_2}{k_1} \right. \\ &\quad \times \cos(\omega_0 t_2) \left. \right\} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_1}{k_1} \\ \dot{x}_2 &= v + \omega_0 \left\{ C_3 - \frac{f_1 + f_2}{k_1} \sin(\omega_0 t_2) \right\} \cos(\omega_0 t) - \omega_0 \left\{ C_4 - \frac{f_1 + f_2}{k_1} \cos(\omega_0 t_2) \right\} \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

以下、同様にして、

(4)  $t_{n-1} \leq t \leq t_n$  のとき、

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= vt + \left\{ -\frac{v}{\omega_0} + \frac{f_1 + f_2}{k_1} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \sin(\omega_0 t_i) \right\} \sin(\omega_0 t) + \left\{ \frac{k_1 x_0 - f_1}{k_1} + \frac{f_1 + f_2}{k_1} \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \cos(\omega_0 t_i) \right\} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_1 - f_2}{2 k_1} + (-1)^{n-1} \left( \frac{f_1 + f_2}{2 k_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

(4-13) 式を、(4-4) 式に代入すると、

$$x_1 = vt + \frac{1}{k_1 + k_2} \left\{ \frac{-v}{\omega_0} k_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{k_2}{k_1} (k_1 x_0 - f_1) \cos(\omega_0 t) + \frac{k_2}{2 k_1} (f_1 - f_2) \right\}$$

$$+(-1)^{n-1} \frac{k_2}{2k_1} (f_1 + f_2) + \frac{k_2}{k_1} (f_1 + f_2) \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \cos(\omega_0(t - t_i)) + \frac{f_1 - f_2}{2}$$

$$+(-1)^{n-1} \frac{(f_1 + f_2)}{2} \quad \quad \quad (4-14)$$

(4-14) 式において  $t_i$  は未知量であるので、 $t_i$  を決めるため、相対速度の符号のかわる時間では、 $\dot{x}_1$  が  $\frac{d}{dt}(\alpha \sin(\omega t))$  に等しいから、(4-14) 式から  $\dot{x}_1$  を求めて、等式をつくると、

$$\dot{x}_1 = v + \frac{1}{k_1 + k_2} \left\{ -k_2 v \cos(\omega_0 t) - \frac{k_2}{k_1} \omega_0 (k_1 x_0 - f_1) \sin(\omega_0 t) + \frac{k_2}{k_1} \omega_0 (f_1 + f_2) \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \sin(\omega_0(t - t_i)) \right\} = \alpha \omega \cos(\omega t)$$

ここで、変換点、 $t_n$  を代入して、 $t_n$  の関係式を求める。

$$\left. \dot{x}_1 \right|_{t=t_n} = v + \frac{1}{k_1 + k_2} \left\{ -k_2 v \cos(\omega_0 t_n) - \frac{k_2}{k_1} \omega_0 (k_1 x_0 - f_1) \sin(\omega_0 t_n) + \frac{k_2}{k_1} \omega_0 (f_1 + f_2) \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \sin(\omega_0(t_n - t_i)) \right\} = \alpha \omega \cos(\omega t_n) \quad (4-15)$$

(4-15) 式を直接解くことは、困難なため、近似計算をおこなう。近似計算のための仮定を以下に示す。  
 $\omega \gg \omega_0, \alpha \omega \gg x_0 \omega_0, \alpha \omega \gg \frac{f_1}{k_1} \omega_0, \alpha \omega \gg \frac{f_2}{k_1} \omega_0, \alpha \omega \gg v,$

上記の仮定により、 $t_n$  は  $\frac{2n-1}{2\omega}\pi$  に非常に近い値になると、考えられるから、 $t_n$  を以下のようにおく。

$$t_n = \frac{2n-1}{2\omega}\pi + \Delta t_n \quad (4-16)$$

$\Delta t_n$  は  $\Delta t_n \ll \frac{\pi}{\omega}$  の関係にあると考えられる。

$$\alpha \omega \cos(\omega t_n) = \alpha \omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2n-1}{2}\pi - \omega \cdot \Delta t_n\right) \doteq \alpha \omega \cdot (-1)^n \omega \cdot \Delta t_n \quad (4-17)$$

(4-17) 式の近似式は展開式で  $\omega \cdot \Delta t_n$  の第 3 次、およびそれ以上の高次のものは省略している。以下、 $\omega \cdot \Delta t_n, (\frac{\omega_0}{\omega})$  の第 3 次、および、それ以上の高次のものは省略している。

$$\cos(\omega_0 t_n) \doteq \cos\left\{\frac{\omega_0}{\omega}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} - \omega_0 \cdot \Delta t_n \sin\left\{\frac{\omega_0}{\omega}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \quad (4-18)$$

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t_n) &= \sin\left\{\frac{\omega_0}{\omega}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \cos(\omega_0 \cdot \Delta t_n) + \sin(\omega_0 \cdot \Delta t_n) \cos\left\{\frac{\omega_0}{\omega}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \\ &\doteq \sin\left\{\frac{\omega_0}{\omega}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)(\omega \cdot \Delta t_n) \cos\left\{\frac{\omega_0}{\omega}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \end{aligned} \quad (4-19)$$

$$\begin{aligned} \sin\left\{\omega_0(t_n - t_i)\right\} &\doteq \sin\left\{\frac{\omega_0}{\omega}(n - i)\pi\right\} + \cos\left\{\frac{\omega_0}{\omega}(n - i)\pi\right\} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)(\omega \Delta t_n - \omega \cdot \Delta t_i) \end{aligned} \quad (4-20)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i \sin\left\{\frac{\omega_0}{\omega}(n - i)\pi\right\} &= \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i \frac{e^{j(\omega_0/\omega)(n-i)\pi} - e^{-j(\omega_0/\omega)(n-i)\pi}}{2j} \\ &= \frac{1}{2j} \left\{ \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i e^{j(\omega_0/\omega) \cdot (n-i)\pi} - \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^i e^{j(\omega_0/\omega) \cdot (i-n)\pi} \right\} \\ &= -\frac{1}{2\cos\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{\pi}{2}\right\}} \cdot \left[ \sin\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} - (-1)^{n-1} \cdot \sin\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{\pi}{2}\right\} \right] \end{aligned} \quad (4-21)$$

(4-15) 式は (4-17) ~ (4-21) 式を使って変形すると、

$$\begin{aligned} \omega \cdot \Delta t_n &\doteq \frac{v}{a\omega}(-1)^n - \left(\frac{v}{a\omega}\right)\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}\right) \left[ \cos\left\{\frac{\omega_0}{\omega}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \right] \cdot (-1)^n \\ &\quad - \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{1}{k_1+k_2} \cdot \frac{1}{a} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)(k_1 x_0 - f_1) \sin\left\{\frac{\omega_0}{\omega}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \cdot (-1)^n \\ &\quad - \frac{(-1)^n \frac{k_2}{k_1} \frac{1}{a} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)(f_1 + f_2)}{2 \cos\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{\pi}{2}\right\} \cdot (k_1 + k_2)} \cdot \sin\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} - \frac{k_2}{2k_1} \left(\frac{1}{a}\right) \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \\ &\quad \left(\frac{f_1 + f_2}{k_1 + k_2}\right) \tan\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{\pi}{2}\right\} \quad \text{以上を簡略化して、} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \cdot \Delta t_n &\doteq (-1)^n \left(\frac{v}{a\omega}\right) - \left(\frac{v}{a\omega}\right)\left(\frac{k_2}{k_1+k_2}\right) \cos\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} \cdot (-1)^n \\ &\quad - (-1)^n \left\{ \frac{k_2}{k_1(k_1+k_2)} \left(\frac{\omega_0}{a\omega}\right)(k_1 x_0 - f_1) + \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{\omega_0}{a\omega}\right)(f_1 + f_2) \right\} \\ &\quad \cdot \sin\left\{\frac{\omega_0}{\omega}\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\right\} - \frac{k_2}{4k_1} \left(\frac{1}{a}\right) \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left(\frac{f_1 + f_2}{k_1 + k_2}\right) \cdot \pi \end{aligned} \quad (4-22)$$

の式が導びかれる。

$$\text{但し、 } \tan\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{\pi}{2}\right\} \doteq \frac{\pi}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

ここで、バネ定数  $k_1, k_2$  に関して、実験では、 $k_1 = k_2$  となるように、おこなっているので、実験条件

に合わせて、(4-22)式は

$$\begin{aligned}
 \omega \cdot \Delta t_n &= (-1)^n \left( \frac{v}{\alpha \omega} \right) - \left( \frac{v}{\alpha \omega} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \left\{ \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi \right\} \cdot (-1)^n \\
 &\quad - (-1)^n \left\{ \frac{1}{2 \alpha k_1} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) (k_1 x_0 - f_1) + \frac{1}{4 \alpha k_1} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) (f_1 + f_2) \right\} \sin \left\{ \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi \right\} - \frac{\pi}{8 \alpha} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left( \frac{f_1 + f_2}{k_1} \right) \\
 &\quad \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi \} - \frac{\pi}{8 \alpha} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left( \frac{f_1 + f_2}{k_1} \right) \quad \text{つまり、} \\
 \omega \cdot \Delta t_n &= (-1)^n \left[ \frac{v}{\alpha \omega} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \cos \left\{ \frac{\omega_0}{\omega} \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi \right\} \right\} - \frac{1}{2 \alpha k_1} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \left\{ k_1 x_0 - f_1 + \frac{f_1 + f_2}{2} \right\} \right. \\
 &\quad \times \left. \sin \left\{ \frac{\omega_0}{\omega} \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi \right\} - (-1)^n \frac{\pi}{8 \alpha} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left( \frac{f_1 + f_2}{k_1} \right) \right] \quad (4-23)
 \end{aligned}$$

以上のように近似計算から導びいた、(4-23)式を $x_2$ の変位を示す、(4-13)式に代入すると、振動変位が解析的に求まるが、代入し易いように(4-13)式を以下のように変形する。

$$\begin{aligned}
 x_2 = v t - \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) + \frac{k_1 x_0 - f_1}{k_1} \cos(\omega_0 t) + \frac{f_1 + f_2}{k_1} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \cos \left\{ \omega_0 (t - t_i) \right\} \\
 + \frac{f_1 - f_2}{2 k_1} + (-1)^{n-1} \left( \frac{f_1 + f_2}{2 k_1} \right) \quad (4-24)
 \end{aligned}$$

ここで(4-24)式の右辺の4項目に注目して、以下の変形計算をする。

$$\begin{aligned}
 j^2 = -1, \quad t_i = \frac{2(i-1)}{2\omega} \pi + \Delta t_i \quad \text{として、} \\
 \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \cos \left\{ \omega_0 (t - t_i) \right\} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \left\{ e^{j\omega_0(t-t_i)} + e^{-j\omega_0(t-t_i)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \left[ e^{j\omega_0(t-(i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}-\Delta t_i)} + e^{-j\omega_0(t-(i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}-\Delta t_i)} \right] \\
 &\stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \cdot \left[ e^{j\omega_0(t-(i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega})} + e^{-j\omega_0(t-(i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega})} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ e^{-j\omega_0(t-(i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega})} - e^{j\omega_0(t-(i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega})} \right\} \cdot \left( \frac{j\omega_0}{\omega} \right) \omega \cdot \Delta t_i \right] \quad (4-25)
 \end{aligned}$$

ここで計算の便宜上、

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \left[ e^{j\omega_0 \{t - (i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}\}} + e^{-j\omega_0 \{t - (i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}\}} \right] \\
& = \frac{\cos(\omega_0 t) - (-1)^{n-1} \cos\left\{\omega_0 \left\{t - (n-1)\frac{\pi}{\omega}\right\}\right\}}{\cos\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{\pi}{2}\right\}} \quad (4-26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin\left\{\frac{\omega_0}{\omega}(n-1)\pi\right\} \cdot \left[ e^{-j\omega_0 \{t - (i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}\}} - e^{j\omega_0 \{t - (i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}\}} \right] \\
& = \frac{e^{-j\omega_0 \{t - \frac{(2i-1)}{\omega}\}\pi} + e^{j\omega_0 \{t - \frac{(2i-1)}{\omega}\}\pi} - (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})}{2j} \quad (4-27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos\left\{\frac{\omega_0}{\omega}(n-\frac{1}{2})\pi\right\} \cdot \left[ e^{-j\omega_0 \{t - (i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}\}} - e^{j\omega_0 \{t - (i-\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega}\}} \right] \\
& = \frac{e^{-j\omega_0 \{t - \frac{(2i-1)}{\omega}\}\pi} - e^{j\omega_0 \{t - \frac{(2i-1)}{\omega}\}\pi} - e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \quad (4-28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \cos\{\omega_0(t - t_i)\} \\
& = \frac{- (p+r) \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \sin(\omega_0 t) - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) (-1)^{n-1} \sin\left\{\omega_0 \left(t - (n-1)\frac{\pi}{\omega}\right)\right\}}{2 \cos\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{\pi}{2}\right\}} \\
& + \frac{p \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{8} \left\{ \frac{\cos\left\{\omega_0 \left(t - \frac{2\pi(n-1)}{\omega}\right)\right\} - \cos(\omega_0 t)}{\sin\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\pi\right\}} \right\} + \frac{p \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{4} (n-1) \sin(\omega_0 t) \\
& + \frac{s \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{4} \cdot \left\{ \frac{\sin(\omega_0 t) - \sin\left\{\omega_0 \left(t - 2(n-1)\frac{\pi}{\omega}\right)\right\}}{\sin\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\pi} \right\} - \frac{s}{2} \cdot \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) (n-1) \cos(\omega_0 t) \\
& + \frac{\cos(\omega_0 t) - (-1)^{n-1} \cos\left\{\omega_0 \left(t - (n-1)\frac{\pi}{\omega}\right)\right\}}{2 \cos\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{\pi}{2}\right\}} \quad (4-29)
\end{aligned}$$

$$\text{ここで、 } p = \frac{v}{\alpha \omega}, \quad r = \frac{\pi}{8\alpha} (-1)^{i-1} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left( \frac{f_1 + f_2}{k_1} \right)$$

$$s = -\frac{1}{2\alpha k_1} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) (k_1 x_0 - f_1) + \frac{1}{4\alpha k_1} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) (f_1 + f_2) \quad \text{とする。}$$

以上より、(4-24)を変形すると、 $\left( \frac{\omega_0}{\omega} \ll 1 \right)$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= vt - \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) + \frac{k_1 x_0 - f_1}{k_1} \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{f_1 - f_2}{2k_1} + (-1)^{i-1} \frac{(f_1 + f_2)}{2k_1} \\
 &\quad + \frac{f_1 + f_2}{k_1} \left[ \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2} (-1)^{n-1} \cos \left\{ \omega_0 \left( t - (n-1) \frac{\pi}{\omega} \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (p+r) \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \left\{ \sin(\omega_0 t) - (-1)^{n-1} \sin \left\{ \omega_0 \left( t - (n-1) \frac{\pi}{\omega} \right) \right\} \right\} \right] \\
 &\quad + \frac{p}{8} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \cdot \frac{\cos \left\{ \omega_0 \left( t - \frac{2\pi(n-1)}{\omega} \right) \right\} - \cos(\omega_0 t) + 2(n-1) \sin(\omega_0 t)}{\frac{\omega_0}{\omega} \pi} \\
 &\quad + \frac{s}{4} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \left\{ \frac{\sin(\omega_0 t) - \sin \left\{ \omega_0 \left( t - 2(n-1) \frac{\pi}{\omega} \right) \right\}}{\left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \pi} - 2(n-1) \cos(\omega_0 t) \right\} \\
 &\quad \quad \quad (4-30)
 \end{aligned}$$

$$\text{但し、 } \sin \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \pi \approx \frac{\omega_0}{\omega} \pi, \quad \cos \left\{ \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \frac{\pi}{2} \right\} \approx 1 \quad \left( \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \pi \ll 1 \right)$$

以上のように求めた(4-30)式は $(n-1)$ を含む項で、 $n$ を非常に大きい場合にまで、この近似式を用いることはできない。つまり(4-30)式は $\left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)$ なる微小量の2次の量まで採用しているので、 $n$ は非常に大きい所まで適用できない。

(4-30)式は系の固有角振動数 $\omega_0$ と $\omega_0$ にくらべてはるかに大きい角振動数 $\omega$ とで、組み合わされた振動数で構成されている。

ここで、1周期 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 後の変位を考えるとき、

$$\text{仮に、 } \frac{1}{N} = \frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{として、みると} \quad (4-31)$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega} N \quad (4-32)$$

そして、 $t_n$ については (4-16) 式と (4-32) 式より  $t_n = t + \frac{\pi}{2\omega} + \Delta t_n = \frac{4N+1}{2\omega} \cdot \pi + \Delta t_n$

$$= \frac{2n-1}{2\omega} \pi + \Delta t_n \text{ となり、 } n \text{ と } N \text{ の関係は } n = 2N+1 \quad (4-33) \text{ となる。}$$

以上を (4-30) 式に代入すると、

$$\left. \frac{x_2}{x_1} \right|_{t=\frac{2\pi}{\omega_0}} = \left( \frac{v}{\omega_0} 2\pi \right) + x_0 \left( 1 - \frac{f_1 + f_2}{2ak_1} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) + \frac{\left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) \left( f_1^2 - f_2^2 \right)}{4a k_1^2} \quad (4-34)$$

$$\text{ここで、 } \xi = \frac{\omega_0}{\omega}, \quad h = \frac{x_f \xi}{4a\pi}, \quad x_f = \frac{f_1 + f_2}{k_1}, \quad x_g = \frac{f_2 - f_1}{k_1}, \quad T_0 = mg$$

$\xi \pi (n-1) \neq \omega_0 t$  とすると (但し、ここでは  $k_1 = k_2$  としている。)

$$T_2 = k_2(x_3 - x_1) + T_0 = \frac{-k_1 x_0}{2} (1 - 2\pi h) + \frac{k_1 \cdot x_f \cdot x_g \cdot \xi}{8a} - \frac{f_1}{2} + T_0 \quad (4-35)$$

$$T_1 = k_1(x_3 - x_1) + T_0 = \frac{-k_1 x_0}{2} (1 - 2\pi h) + \frac{k_1 \cdot x_f \cdot x_g \cdot \xi}{8a} - \frac{f_1}{2} + T_0 \quad (4-36)$$

となる。すなわち、 $t = 0$  から、 $t = \frac{2\pi}{\omega_0}$  、 すなわち、1 周期だけ、時間がたつと、変位振幅は

( $2\pi h$ )だけ、減少することになる。このことから、(4-30) 式を  $p = \frac{v}{a\omega}$ 、で  $v = 1 \text{ mm/sec}$

であるから、本実験条件では、 $p \neq 0$ 、 $\xi(n-1)\pi \neq \omega_0 t$  を使って、変形すると、

$$\begin{aligned} x_2 &\neq x_0 (1 - h \omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + h x_0 \sin(\omega_0 t) \\ &- \frac{1}{2} h \cdot x_g \cdot (\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + \frac{x_g}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{h}{2} x_g \sin(\omega_0 t) \\ &+ vt - \frac{x_g}{2} - \frac{v}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \frac{\pi}{16} x_f^2 (-1)^{n-1} \cdot \xi^2 \sin(\omega_0 t) \end{aligned} \quad (4-37)$$

(4-37) 式の第1項と第2項は、 $x_0 e^{-h\omega_0 t} \cos(\omega_0 t - h)$  を展開して、 $h^2$  以上を省略した形

である。

$$x_2 \doteq x_0 e^{-h\omega_0 t} \cos(\omega_0 t - h) + vt - \frac{x_g}{2} - \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2} h \cdot x_g(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t)$$

$$+ \frac{x_g}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{h}{2} x_g \sin(\omega_0 t) - \frac{\pi}{16a} x_f^2 (-1)^{n-1} \xi^2 \sin(\omega_0 t). \quad (4-38)$$

同様にして、

$$x_1 = vt - \frac{1}{2} \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k_1 (k_1 x_0 - f_1) \cos(\omega_0 t) + \frac{f_1 - f_2}{2 k_1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2 k_1} (f_1 + f_2)$$

$$+ \frac{f_1 + f_2}{2 k_1} \sum_{i=1}^{i=n-1} (-1)^{i-1} \cos \left\{ \omega_0 (t - t_i) \right\}. \quad (4-39)$$

(4-39) 式を変形すると、

$$x_1 \doteq \frac{x_0}{2} (1 - h \omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + \frac{h}{2} x_0 \sin(\omega_0 t) + \frac{\xi}{16a\pi} x_f \cdot x_g \sin(\omega_0 t)$$

$$- \frac{\pi x_f^2}{32a} \xi^3 (-1)^{n-1} \sin(\omega_0 t) - x_f \cdot x_g \cdot \xi^2 \frac{(n-1)}{16a} \cos(\omega_0 t) + \frac{x_g}{4} \cos(\omega_0 t)$$

$$- \frac{1}{2} \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) + vt - \frac{x_g}{2} + \frac{x_f}{4} (-1)^{n-1}.$$

$\xi^3$  の項を無視して、変形すると、

$$x_1 \doteq \frac{1}{2} x_0 \left\{ (1 - h \omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + h \sin(\omega_0 t) \right\} + \frac{\xi \cdot x_f \cdot x_g}{16a\pi} \sin(\omega_0 t)$$

$$- x_f \cdot x_g \cdot \xi^2 \frac{(n-1)}{16a} \cos(\omega_0 t) + \frac{x_g}{4} \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) + vt$$

$$- \frac{x_g}{2} + \frac{x_f}{4} (-1)^{n-1}$$

$$x_1 \doteq \frac{x_0}{2} \cdot e^{-h\omega_0 t} \cos(\omega_0 t - h) + \frac{1}{4} \cdot h \cdot x_g \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{4} h \cdot x_g(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t)$$

$$+\frac{x_g}{4} \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) + vt - \frac{x_g}{2} + \frac{x_f}{4} (-1)^{n-1} \quad (4-40)$$

以上より、 $x_1, x_2$  は減衰常数  $h$  の減衰振動になっているから、これより、張力波形  $T_1, T_2$  を求める

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = k_1(vt - x_1) + T_0 \\ T_2 = k_2(x_1 - x_2) + T_0 \end{array} \right\} \text{より} \quad \left. \begin{array}{l} T_0 = mg \\ k_1 = k_2 \text{ としている。} \end{array} \right\}$$

$$T_1 = -k_1 \cdot \frac{x_0}{2} e^{-h\omega_0 t} \cos(\omega_0 t - h) - \frac{k_1 \cdot h \cdot x_g}{4} \sin(\omega_0 t) + \frac{k_1}{4} h \cdot x_g (\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) \quad (4-41)$$

$$- \frac{k_1}{4} x_g \cos(\omega_0 t) + \frac{k_1}{2} \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) + \frac{k_1 x_g}{2} - \frac{k_1 x_f}{4} (-1)^{n-1} + T_0 \quad (4-41)$$

$$T_2 = -\frac{k_2 \cdot x_0}{2} e^{-h\omega_0 t} \cos(\omega_0 t - h) - \frac{k_2 \cdot h \cdot x_g}{4} \sin(\omega_0 t) + \frac{k_2 h x_g}{4} (\omega_0 t) \cos(\omega_0 t)$$

$$- \frac{k_2 \cdot x_g}{4} \cos(\omega_0 t) + \frac{k_2}{2} \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) + \frac{k_2 \cdot \pi \cdot x_f^2}{16 \alpha} (-1)^{n-1} \xi^2 \sin(\omega_0 t)$$

$$+ \frac{k_2 \cdot x_f}{4} (-1)^{n-1} + T_0 \quad (4-42)$$

ここで、

$$f_1 = T_0(1 - e^{-\mu\theta}), \quad f_2 = T_0(e^{\mu\theta} - 1)$$

但し、 $\mu$ ：摩擦係数、 $\theta$ ：接触角、 $T_0 = mg$ 、としている。

$$\left. \begin{array}{l} \text{また、} \quad \frac{f_1 - f_2}{2} = T_0(1 - \cosh(\mu\theta)) \\ \frac{f_1 + f_2}{2} = T_0 \sinh(\mu\theta) \end{array} \right\} \quad (4-43)$$

により

$$\begin{aligned}
T_1 = & \frac{-k_1 x_0}{2} \cdot e^{-h\omega_0 t} \cos(\omega_0 t - h) + \frac{h}{2} T_0 (1 - \cosh(\mu\theta)) \cos(\omega_0 t) \\
& - \frac{h}{2} T_0 (1 - \cosh(\mu\theta)) (\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + \frac{T_0}{2} (1 - \cosh(\mu\theta)) \cos(\omega_0 t) \\
& + \frac{k_1}{2} \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) - T_0 (1 - \cosh(\mu\theta)) - \frac{(-1)^{n-1}}{2} T_0 \sinh(\mu\theta) + T_0 . (4-44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 = & -\frac{k_2 x_0}{2} e^{-h\omega_0 t} \cos(\omega_0 t - h) + \frac{h}{2} T_0 (1 - \cosh(\mu\theta)) \sin(\omega_0 t) \\
& - \frac{h}{2} T_0 (1 - \cosh(\mu\theta)) (\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + \frac{T_0}{2} (1 - \cosh(\mu\theta)) \cos(\omega_0 t) \\
& + \frac{k_2}{2} \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) + \frac{k_2 \pi}{16a} x_f^2 (-1)^{n-1} \cdot \xi^2 \sin(\omega_0 t) + \frac{(-1)^{n-1}}{2} (T_0 \sinh(\mu\theta)) \\
& + T_0 . (4-45)
\end{aligned}$$

となる。

以上のように、張力変動がおきたときに、(4-44), (4-45) 式の第1項のように、張力変動は減衰していくことが、わかる。

### 5. 考察

実験で求めた、張力波形、Fig. 5 ~ Fig. 9 と理論解析の結果を検討すると、糸ガイドの固体摩擦（クーロン摩擦）が、回転振動により、流体摩擦化することが、確認された。その減衰常数は  $h$  であらわされる。(4-44) 式は摩擦力検出側張力波形であり、(4-45) 式は、重錘側の張力波形である。両式共、第1項で、張力変動項  $\left( \frac{-k_2 x_0}{2} \right)$ ,  $\left( \frac{-k_1 x_0}{2} \right)$  が  $(e^{-h\omega_0 t})$  により、指数的に減衰していく。また、 $h$  は小さい為、第1項は、 $\omega_0$  の振動数の平均の運動で、これが減衰常数  $h$  の指数的減衰する。第2項以下は、一定値および、振幅の小さい、角振動数  $\omega_0$  の振動や、 $\frac{(-1)^{n-1}}{2} (T_0 \sinh(\mu\theta))$  の項のように、糸とガイドの相対速度が零になるに従って、符号を変える。これは振動数  $\omega$  の微小振動をあらわして、実験波形にも、明瞭に、あらわれている。Fig. 5 のように、ガイドのクーロン摩擦で、歪んだ、波形を示す張力波形が、Fig. 6 のように、振動数  $\omega$  の高周波微小振動が、加わってはいるが、大きな流れとして、余弦曲線の減衰した波形に変わる。つまり、振動固体摩擦、によって、流体摩擦化し、異常張力変動を、減衰させていく、効果が、判明した。

### 6. 結 言

(1) 繊維ガイドに回転振動を付与すると、ガイドのクーロン摩擦が流体摩擦化して、張力波形を

減衰させ、その減衰常数は  $h = \frac{x_f}{4\alpha\pi} \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)$  である。

(2) 摩擦力検出側張力波形の理論式と、重錘側の張力波形の理論式は、

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{-k_1 x_0}{2} e^{-h\omega_0 t} \cos(\omega_0 t - h) + \frac{h}{2} T_0 (1 - \cosh(\mu\theta)) \cos(\omega_0 t) \\
 &\quad - \frac{h}{2} T_0 (1 - \cosh(\mu\theta)) (\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) + \frac{T_0}{2} (1 - \cosh(\mu\theta)) \cos(\omega_0 t) \\
 &\quad + \frac{k_1}{2} \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) - T_0 (1 - \cosh(\mu\theta)) - \frac{(-1)^{n-1}}{2} T_0 \sinh(\mu\theta) + T_0. \\
 T_2 &= -\frac{k_2 x_0}{2} e^{-h\omega_0 t} \cos(\omega_0 t - h) + \frac{h}{2} T_0 (1 - \cosh(\mu\theta)) \sin(\omega_0 t) \\
 &\quad - \frac{h}{2} T_0 \left( \frac{v}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) + \frac{k_2 \pi}{16\alpha} x_f^2 (-1)^{n-1} \xi^2 \sin(\omega_0 t) \\
 &\quad + \frac{(-1)^{n-1}}{2} (T_0 \sinh(\mu\theta)) + T_0. \quad \text{となる。}
 \end{aligned}$$

(3) 以上により、糸が走行中に、突発的な、異常振動をおこしたとき、ガイドに回転振動を付与すると、その振動は、あたかも、流体摩擦が作用したように、指数的に減衰して行くことが判明した。

このように、回転振動の有効性が確認されたが、本研究における、理論解析のための仮定の実験的検討や、(4-13) 式、(4-14) 式などの電子計算機による、数値、解析は別の機会に発表するつもりです。最後に本研究にあたり、御指導を賜った金沢大学工学部吉村教授に深甚な感謝の意を表します。

- (註)**
- (1) 井村、吉村；金沢大学大学院修士論文  
“ナイロン糸を主体とした振動ガイドと糸の摩擦に関する研究”（昭和46年）
  - (2) 西村、神保、高野 “長周期振動計”（第1報）  
精密機械32巻2号（1966年）